Document de support à la présentation :

Conception des charpentes d’aluminium

Module 5 – Pièces et parois en compression

Contenu développé par :

**Ahmed Rahem, ing., Ph. D.**

Professeur au Département des sciences appliquées de l’UQAC

Table des matières

[Note 6](#_Toc127200408)

[A- Introduction 7](#_Toc127200409)

[Diapositive 7 : 7](#_Toc127200410)

[Diapositive 8 : 8](#_Toc127200411)

[Diapositive 9 et 10 : 8](#_Toc127200412)

[Diapositive 11 : 8](#_Toc127200413)

[Diapositive 12 : 9](#_Toc127200414)

[B- Classification et utilisation des pièces en compression 10](#_Toc127200415)

[Diapositive 16 : 10](#_Toc127200416)

[C- Élancement limite des membrures comprimées 13](#_Toc127200417)

[D- Modes de rupture d’une pièce comprimée 14](#_Toc127200418)

[Diapositive 24 et 25 : 14](#_Toc127200419)

[E- Approches à la normalisation 16](#_Toc127200420)

[Diapositive 29 et 30 : 16](#_Toc127200421)

[Diapositive 31 : 18](#_Toc127200422)

[F- Variables influençant la résistance 19](#_Toc127200423)

[Diapositive 35 : 19](#_Toc127200424)

[Diapositive 36 et 37 : 19](#_Toc127200425)

[Diapositive 38 : 20](#_Toc127200426)

[Diapositive 39 : 21](#_Toc127200427)

[Diapositive 40 : 21](#_Toc127200428)

[Diapositive 41 et 42 : 23](#_Toc127200429)

[Diapositive 43 : 24](#_Toc127200430)

[Diapositive 44 : 26](#_Toc127200431)

[Diapositive 45 et 46 : 26](#_Toc127200432)

[G- Voilement des parois minces 28](#_Toc127200433)

[Diapositive 50 : 28](#_Toc127200434)

[Diapositive 51 : 28](#_Toc127200435)

[H- Voilement des éléments plats 30](#_Toc127200436)

[Diapositive 57 : 30](#_Toc127200437)

[I- Modes de rupture des éléments plats 33](#_Toc127200438)

[Diapositive 61 : 33](#_Toc127200439)

[Diapositive 62 : 34](#_Toc127200440)

[J- Élancement des éléments plats 37](#_Toc127200441)

[Diapositive 66 : 37](#_Toc127200442)

[Diapositive 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73 et 74 : 38](#_Toc127200443)

[K- Élancement normalisé des éléments plats (parois) 40](#_Toc127200444)

[Diapositive 85, 86 et 87 : 40](#_Toc127200445)

[L- Contrainte de flambement normalisée des éléments plats (parois) 41](#_Toc127200446)

[Diapositive 90 : 41](#_Toc127200447)

[M- Contrainte de flambement (voilement) des éléments plats (parois) 42](#_Toc127200448)

[Diapositive 95 : 42](#_Toc127200449)

[N- Flambement des pièces 43](#_Toc127200450)

[Diapositive 100 : 43](#_Toc127200451)

[Diapositive 101 : 45](#_Toc127200452)

[Diapositive 102 : 45](#_Toc127200453)

[Diapositive 103: 47](#_Toc127200454)

[Diapositive 104 : 48](#_Toc127200455)

[Diapositive 105 : 48](#_Toc127200456)

[Diapositive 106 : 49](#_Toc127200457)

[Diapositive 107 : 49](#_Toc127200458)

[Diapositive 108 : 50](#_Toc127200459)

[Diapositive 109 et 110 : 50](#_Toc127200460)

[Diapositive 111 et 112 : 52](#_Toc127200461)

[Diapositive 113 : 53](#_Toc127200462)

[Diapositive 114, 115 et 116 : 53](#_Toc127200463)

[Diapositive 117, 118 et 119 : 54](#_Toc127200464)

[O- Calcul des pièces à section composée 57](#_Toc127200465)

[Diapositive 123 et 125 : 57](#_Toc127200466)

[Diapositive 126 et 127 : 58](#_Toc127200467)

[Diapositive 128 : 59](#_Toc127200468)

[Diapositive 130 : 60](#_Toc127200469)

[Diapositive 131 : 60](#_Toc127200470)

[P- Flambement des panneaux plats raidis 62](#_Toc127200471)

[Diapositive 135 et 136 : 62](#_Toc127200472)

[Diapositive 137 : 63](#_Toc127200473)

[Diapositive 138 : 63](#_Toc127200474)

[Diapositive 139 : 64](#_Toc127200475)

[Diapositive 140 et 141 : 65](#_Toc127200476)

[Diapositive 142 : 66](#_Toc127200477)

[Q- Flambement des parois courbes et des tubes 67](#_Toc127200478)

[Diapositive 146 et 147 : 67](#_Toc127200479)

[Diapositive 148 : 67](#_Toc127200480)

[Diapositive 149 : 68](#_Toc127200481)

[Diapositive 150 : 69](#_Toc127200482)

[Diapositive 151 et 152 : 70](#_Toc127200483)

[R- Flambement des panneaux sandwich 71](#_Toc127200484)

[Diapositive 156 : 71](#_Toc127200485)

[Diapositive 157 : 71](#_Toc127200486)

[Diapositive 158 : 73](#_Toc127200487)

[Diapositive 159 : 74](#_Toc127200488)

[S- Pièces en torsion 75](#_Toc127200489)

[Diapositive 163 et 164 : 75](#_Toc127200490)

[Diapositive 165 : 76](#_Toc127200491)

[Diapositive 166 : 77](#_Toc127200492)

[Diapositive 167 et 168 : 78](#_Toc127200493)

[Diapositive 169 : 79](#_Toc127200494)

[Diapositive 170 : 80](#_Toc127200495)

[Diapositive 171 : 81](#_Toc127200496)

[Diapositive 172 : 81](#_Toc127200497)

[Diapositive 173, 174, 175 et 176 : 83](#_Toc127200498)

[Diapositive 177 : 84](#_Toc127200499)

[Diapositive 178 : 84](#_Toc127200500)

# Note

Avec la permission de monsieur Denis Beaulieu, une certaine partie du matériel est reproduite des manuels *Calcul des charpentes d’aluminium* et *Les caractéristiques de l’aluminium structural*. Bien que l'utilisation du matériel ait été autorisée, monsieur Beaulieu n'est pas responsable de la manière dont les données sont présentées, ni de toute représentation ou interprétation.

# Introduction

## Diapositive 7 :

Les éléments en compression sont dimensionnés de façon à ce que la résistance pondérée à la compression (Cr) de la pièce soit égale ou supérieure à la force de compression pondérée (Cf) appliquée sur l’élément.

(5.1)

De façon générale, la résistance en compression d’un élément est directement proportionnelle à l’aire brute (Ag) de la section mesurée perpendiculairement à l’axe de la force de compression et à la limite élastique (Fy) de l’alliage d’aluminium utilisé. Une membrure est en compression pure lorsque la force de compression passe par le centre de gravité de la section transversale. La résistance maximale de la pièce est atteinte lorsqu’il y a plastification du métal sur toute cette surface. Ceci est rarement le cas en pratique puisque sous l’effort de compression, l’élément subira un déplacement latéral appelé flambage. Ce déplacement fera en sorte qu’il y aura une excentricité entre le point d’application de la charge et le centre de gravité de la pièce. En plus de l’effort de compression, l’élément sera soumis à un effort de flexion (flambage en flexion) ou à un effort de torsion (flambage en torsion) ou à un effort de torsion et de flexion (flambage en torsion et en flexion combiné).

Le flambage en flexion est le plus courant pour les sections dites symétriques (dont le matériel est distribué symétriquement par rapport aux axes principaux de l’élément). Le flambage en torsion sera plutôt le mode de flambage des sections non symétriques.

L’élancement de la pièce (λ), soit le rapport entre la longueur et le rayon de giration, déterminera la capacité de la pièce à résister au flambage. Plus l’élancement est grand, plus la pièce sera sujette au flambage et sa résistance en sera diminuée. De plus, la plupart des profilés utilisés dans les structures sont formés de parois relativement minces. Par exemple, un profilé en I ou en C est formé de deux ailes ou semelles et d’une partie centrale, appelée âme. Chacune de ces parties représente une paroi de faible épaisseur qui elle-même est sujette au voilement. Le flambage d’une des parois pourra atteindre un état critique avant même que l’état critique de la pièce entière soit atteint. On doit donc en tenir compte dans les équations de calculs du voilement des parois. On observe le même phénomène dans les pièces d’acier, mais celui-ci est beaucoup plus critique dans le cas des pièces en aluminium puisque les parois des sections sont généralement plus élancées.

## Diapositive 8 :

Ceci est rarement le cas en pratique puisque sous l’effort de compression, l’élément subira un déplacement latéral appelé flambage. Ce déplacement fera en sorte qu’il y aura une excentricité entre le point d’application de la charge et le centre de gravité de la pièce. En plus de l’effort de compression, l’élément sera soumis à un effort de flexion (flambage en flexion) ou à un effort de torsion (flambage en torsion) ou à un effort de torsion et de flexion (flambage en torsion et en flexion combiné). Le flambage en flexion est le plus courant pour les sections dites symétriques (dont le matériel est distribué symétriquement par rapport aux axes principaux de l’élément). Le flambage en torsion sera plutôt le mode de flambage des sections non symétriques.

L’élancement de la pièce (λ), soit le rapport entre la longueur et le rayon de giration, déterminera la capacité de la pièce à résister au flambage. Plus l’élancement est grand, plus la pièce sera sujette au flambage et sa résistance en sera diminuée.

## Diapositive 9 et 10 :

Le flambage en flexion est le plus courant pour les sections dites symétriques. Le flambage en torsion sera plutôt le mode de flambage des sections non symétriques.

La résistance maximale de la pièce est atteinte lorsqu’il y a plastification du métal sur toute cette surface. Ceci est rarement le cas en pratique puisque sous l’effort de compression, l’élément subira un déplacement latéral appelé flambage. Ce déplacement fera en sorte qu’il y aura une excentricité entre le point d’application de la charge et le centre de gravité de la pièce. En plus de l’effort de compression, l’élément sera soumis à un effort de flexion (flambage en flexion) ou à un effort de torsion (flambage en torsion) ou à un effort de torsion et de flexion (flambage en torsion et en flexion combiné). Le flambage en flexion est le plus courant pour les sections dites symétriques (dont le matériel est distribué symétriquement par rapport aux axes principaux de l’élément). Le flambage en torsion sera plutôt le mode de flambage des sections non symétriques.

## Diapositive 11 :

De plus, la plupart des profilés utilisés dans les structures sont formés de parois relativement minces. Par exemple, un profilé en I ou en C est formé de deux ailes ou semelles et d’une partie centrale, appelée âme. Chacune de ces parties représente une paroi de faible épaisseur qui, elle-même, est sujette au voilement. Le flambage d’une des parois pourra atteindre un état critique avant même que l’état critique de la pièce entière soit atteint. On doit donc en tenir compte dans les équations de calculs du voilement des parois. **On observe le même phénomène dans les pièces d’acier, mais celui-ci est beaucoup plus critique dans le cas des pièces en aluminium puisque les parois des sections sont généralement plus élancées.**

Quelle que soit l’application, l’étude de la résistance des pièces et des parois en compression est relativement complexe puisqu’elle fait intervenir des notions de stabilité. Ceci s’applique particulièrement aux charpentes et structures d’aluminium. En effet, puisque l’aluminium est léger, il est essentiellement utilisé pour la construction de structures légères (bâtiments, coques d’avion, remorques, diaphragmes, cloisons, etc.). Les normes de calcul des charpentes et structures d’aluminium doivent non seulement tenir compte de la résistance et de la stabilité globales des pièces mais aussi du flambement et du voilement des parois les constituant. C’est le prix à payer pour satisfaire au critère de légèreté! Par conséquent, l’utilisation de ces normes apparaît plus abstraite, à prime abord, que l’utilisation de la plupart des normes de calcul des charpentes d’acier. Ces dernières contournent le problème en limitant l’élancement des parois comprimées à des valeurs qui rendent le voilement des parois de la section moins critique que le flambement global des pièces. Le calcul des charpentes d’acier est ainsi grandement facilité. Des normes plus spécialisées sont développées pour le calcul des charpentes et structures d’acier à parois minces.

## Diapositive 12 :

**5.4 Variables influençant la résistance**

Les principales variables susceptibles d’influencer le comportement des pièces et des parois en compression sont les types d'alliages, la section des pièces, les variations d’épaisseur de la section, les défauts de rectitude, les contraintes résiduelles (particulièrement celles induites par le soudage) et le degré de retenue aux extrémités des pièces. On verra dans cette section comment chacune de ces variables affecte l’allure générale de la courbe montrée sur la figure 5.6[[1]](#footnote-1).

# Classification et utilisation des pièces en compression

## Diapositive 16 :

**Chapitre V – Pièces et parois en compression**

**5.1 Introduction**

Dans les charpentes, une des principales pièces appelées à résister aux charges est la pièce comprimée. La pièce comprimée existe dans l’ossature de la structure, sous forme de poteau ou de diagonale de contreventement. Elle représente aussi près de la moitié des pièces de treillis, que ceux-ci soient verticaux ou horizontaux, ou qu’ils soient utilisés dans les charpentes de bâtiment ou dans les ouvrages d’art.

Dans les charpentes métalliques, **l’étude des effets de la compression ne se limite pas qu’aux pièces, mais s’étend aux éléments qui les constituent : ailes et âmes des pièces comprimées, aile comprimée des poutres fléchies, parois raidies, parois, coques, etc.**

Quelle que soit l’application, l’étude de la résistance des pièces et des parois en compression est relativement complexe puisqu’elle fait intervenir des notions de stabilité. Ceci s’applique particulièrement aux charpentes et structures d’aluminium. En effet, puisque l’aluminium est léger, il est essentiellement utilisé pour la construction de structures légères (bâtiments, coques d’avion, remorques, diaphragmes, cloisons, etc.). Les normes de calcul des charpentes et structures d’aluminium doivent non seulement tenir compte de la résistance et de la stabilité globales des pièces mais aussi du flambement et du voilement des parois les constituant. C’est le prix à payer pour satisfaire au critère de légèreté!

Par conséquent, l’utilisation de ces normes apparaît plus abstraite, de prime abord, que l’utilisation de la plupart des normes de calcul des charpentes d’acier. Ces dernières contournent le problème en limitant l’élancement des parois comprimées à des valeurs qui rendent le voilement des parois de la section moins critique que le flambement global des pièces. Le calcul des charpentes d’acier est ainsi grandement facilité. Des normes plus spécialisées sont développées pour le calcul des charpentes et structures d’acier à parois minces.

Comme l’indique le titre du chapitre, les pièces, ainsi que les parois raidies ou non raidies sollicitées en compression, seront étudiées dans cette partie du volume. On fera parfois référence aux coques, mais ces dernières ne seront pas traitées en détail puisque leur champ d’application (l’avionnerie et les réservoirs, par exemple) déborde celui qui est couvert par le présent volume.

Les pièces comprimées ont un comportement bien différent de celui des pièces tendues, pour deux raisons principales. Alors que les efforts de traction ont pour effet de redresser les pièces, les efforts de compression ont plutôt tendance à les faire fléchir. Ce phénomène, communément appelé flambement, conditionne le comportement de la plupart des pièces comprimées. De plus, comme on le verra plus loin, la résistance des pièces en traction est grandement affectée par les trous pratiqués pour les assemblages boulonnés. La résistance des pièces comprimées, par contre, est évaluée sur la section brute (A = Ag) puisqu’il y a transfert de compression par contact entre les boulons et les parois des trous.

En général, les pièces comprimées résistent à des charges inférieures à la limite , qui correspond à la plastification totale de la section brute, à cause du flambement. Plus la pièce est élancée, plus la résistance est faible. On peut, à la limite, supposer que la résistance de la pièce sera nulle pour un élancement « L/r » égal à l’infini, où *L* est la longueur de la pièce et r le rayon de giration minimal de la section de la pièce**.**

Comme on le verra plus loin, la résistance au flambement d’une pièce comprimée est aussi grandement influencée par le type de section, le degré de retenue aux extrémités de la pièce, la présence de contraintes résiduelles découlant du procédé de fabrication, les imperfections du matériau, la déformée initiale de la pièce, l’excentricité du chargement, etc.

Le voilement des parois constituant les pièces peut aussi contribuer à réduire de façon significative leur résistance. Comme pour le flambement, plus la paroi est élancée, plus la résistance est faible. L’élancement d’une paroi est défini par le rapport « b/t » où b est la largeur de la paroi sollicitée en compression et t est l’épaisseur.

Un exemple de pièces travaillant en compression peut être les principales pièces de support du pont d’Arvida qui peuvent être observées à la page 278 du manuel *Calcul des charpentes d’aluminium* de Denis Beaulieu.

Théoriquement, une pièce est dite en compression pure lorsque la ligne d’action de la force de compression passe par le centre de gravité de la section aux deux extrémités de la pièce. Idéalement, la pièce doit être parfaitement droite, symétrique par rapport aux axes principaux, homogène et isotrope, et la distribution des contraintes résiduelles doit aussi être doublement symétrique. Toutes ces conditions doivent être satisfaites afin de s’assurer que, pour un chargement concentrique, la pièce ne fléchira pas avant que soit atteinte la charge critique de flambement. Il est évident que de telles conditions ne se rencontrent jamais dans la pratique. Ces hypothèses et quelques autres servent uniquement à décrire, à l’aide de modèles mathématiques, le comportement fondamental des pièces en compression pure.

Le concepteur a une définition quelque peu différente des pièces en compression pure. Pour lui, il s’agit d’une pièce qui transmet essentiellement une force de compression et qui ne requiert pas de considérations spéciales de dimensionnement pour les charges latérales ou les moments fléchissant qu’elle supporte. Les conditions réelles peuvent déroger des conditions idéales, mais si elles demeurent à l’intérieur de certaines limites de tolérance, il en tient compte indirectement dans les équations de dimensionnement ou par des facteurs de correction appropriés.

En réalité, il est plutôt rare qu’une pièce, et particulièrement un poteau, soit sollicitée en compression pure. La théorie des pièces comprimées est cependant très utile en pratique, ne serait-ce que pour procéder à un choix préliminaire de section ou encore pour évaluer un des cas limites du calcul des poteaux-poutres (chapitre VI[[2]](#footnote-2)). Lorsque les moments fléchissant sont faibles, on les néglige et on dimensionne la pièce en compression pure. Cette pratique est courante pour le calcul des treillis et des poteaux dans les bâtiments légers.

Il existe une multitude de section simples ou composées généralement utilisées pour résister aux charges de compression. Quelques exemples sont donnés sur la figure 5.1 (voir acétate 15).

De façon évidente, on évite d’utiliser les barres et les plaques non raidies pour résister aux charges de compression. Les cornières, les profilés en C et en T, de même que les tubes sont souvent utilisés dans les treillis, les poutrelles ajourées et les systèmes de contreventement. Comme poteaux dans les bâtiments et comme pièces en compression dans les ponts, on utilise généralement des profilés en I ainsi que des tubes carrés et rectangulaires, simples ou composés. Le calcul des pièces à section composée sera étudié plus loin dans ce chapitre.

Le chapitre V doit être considéré comme un des chapitres pivots de ce volume. Les concepts les plus importants sont étudiés aux sections 5.5 (voilement des parois minces) et 5.6 (flambement des pièces). Les sections qui précèdent (5.1 à 5.4) sont plutôt descriptives et servent d’introduction aux sections 5.5 et 5.6, alors que les sections qui suivent (5.7 à 5.10[[3]](#footnote-3)) décrivent les applications particulières (résistance des pièces à section composée, des panneaux plats raidis, des parois courbes, des tubes et des panneaux sandwich). La section 5.11 traite de la torsion en général et la section 5.12 conclut en présentant sept exemples de calcul qui couvrent essentiellement toute la matière.

# Élancement limite des membrures comprimées

Aucune note particulière pour cette section.

# Modes de rupture d’une pièce comprimée

## Diapositive 24 et 25 :

**5.2 Modes de rupture**

Une brève description des différents modes de rupture qui régissent le comportement des pièces et des parois comprimées, peut servir d’introduction aux nombreux concepts qui seront développés par la suite dans ce chapitre.

En limitant la discussion aux pièces, pour le moment, il est possible de tracer un graphique illustrant de façon schématique la relation qui existe entre la résistance ultime et l’élancement de la pièce. On obtient ainsi une courbe semblable à celle de la figure 5.2 (voir acétate 24), où on observe que la résistance ultime diminue rapidement en fonction de l’élancement.

On simplifie l’étude des pièces comprimées en identifiant trois catégories définies en fonction de l’élancement et en regroupant les pièces à l’intérieur de chacune de ces catégories. Le comportement des pièces est différent d’une catégorie à l’autre, ce qui justifie une étude particulière pour chacune d’entre elles.

Considérons les trois pièces illustrées sur la figure 5.3 (voir acétate 23), dont l’épaisseur et la largeur sont constante mais qui varient en longueur. Sous une charge de compression uniforme croissante, la pièce trapue en (a) va se déformer axialement jusqu’à ce qu’elle atteigne la limite élastique (Fy) sur toute sa section.

La pièce de longueur intermédiaire, montrée en (b), va résister à un accroissement de charge jusqu’à ce qu’elle flambe, en se déplaçant latéralement, tel qu’indiqué sur la figure. Après le flambement, la pièce n’est plus en mesure de résister à la charge imposée. Lorsque cette dernière est enlevée, la pièce reste déformée en permanence, puisque lors du flambement, la section de la pièce avait atteint la limite élastique, en tout ou en partie. On dit alors que la pièce a flambé de façon inélastique. Enfin, lorsqu’une pièce de même section, mais beaucoup plus longue, est sollicitée en compression, la pièce résiste à l’accroissement de charge jusqu’au flambement, dont la déformée est illustrée sur la figure 5.3c.

Ce dernier se produit à une charge beaucoup plus faible que celle à laquelle résiste la pièce de longueur intermédiaire. Après le flambement, la pièce n’est plus en mesure de subir un accroissement de charge. Lorsqu’on retire la charge, la pièce retrouve sa forme initiale. C’est le comportement qu’on observe lorsqu’on s’amuse à comprimer une règle de plastique. La règle flambe élastiquement.

Note : Pièces de largeur et d’épaisseur constantes, mais de longueur variable.

**Figure 5.3 – Modes de rupture des pièces comprimées**

Les pièces trapues ont la résistance ultime la plus élevée et leur capacité maximale est développée lorsque toutes les fibres de la section atteignent la limite élastique. La charge agissant sur la section a été définie précédemment et est égale à Cy :

(5.1)

L’équation (5.1) constitue la limite supérieure et est représentée par la ligne horizontale sur la figure 5.2.

Il convient de rappeler qu’en compression, c’est la limite élastique (Fy) qui constitue la limite de résistance. Nous avons vu, à la sous-section 2.9.3[[4]](#footnote-4), que la limite (ou contrainte) ultime (Fu) n’a pas de signification physique en compression. On a également vu, au chapitre IV, que la contrainte ultime (Fu) des pièces en traction est utilisée pour le calcul de la résistance de la pièce au droit des assemblages où l’effet des déformations est très localisé. Les assemblages ont moins d’impact sur le calcul de la résistance des pièces comprimées même s’ils affectent ces dernières de façon importante, comme on le verra plus loin (excentricités, rigidité flexionnelle, etc.). Il suffit donc de retenir que la contrainte ultime (Fu ou Fwu) n’est pas utilisée dans le calcul de la résistance des pièces comprimées, sauf lorsque celles-ci comportent des soudures transversales à leurs extrémités.

On a également vu, au chapitre II, que certains alliages de corroyage ont une limite élastique en compression légèrement inférieure à la limite élastique obtenue à partir d’essais de traction sur des éprouvettes. Bien que certaines normes font la distinction entre Fcy et Fty, la référence (5.1[[5]](#footnote-5)) ne considère que Fy, dans le but de simplifier les calculs. Les conséquences sont négligeables.

Tel qu’indiqué sur la figure 5.2, le comportement des pièces trapues est influencé par la présence de contraintes résiduelles (σr = Eεr) en équilibre sur la section. Les contraintes résiduelles résultent du mode de fabrication des pièces ou sont induites par le soudage. Elles seront brièvement étudiées à la sous-section 5.4.5[[6]](#footnote-6).

Pour les poteaux élancés, l’état limite ultime est le flambement élastique, brièvement étudié à la sous-section 3.8.3[[7]](#footnote-7). L’équation qui gouverne les calculs est l’équation d’Euler reproduite ici avec un élancement légèrement modifié pour tenir compte des conditions de retenue des poteaux.

(5.2)

# Approches à la normalisation

## Diapositive 29 et 30 :

Les équations de calculs de la résistance de la pièce en fonction de l’élancement doivent tenir compte de tous les modes de rupture possibles. On peut développer différentes formules de calcul correspondant aux différents modes de rupture ou encore développer une équation générale tenant compte des trois modes de rupture.

Cette dernière approche a été retenue par la norme S157 et porte le nom de normalisation. La règle générale est de développer une équation représentant la courbe de résistance à la compression comme démontré à la figure 5.2 (voir acétate 24), mais où l’élancement en abscisse a été normalisé en le divisant par un élancement limite et où la contrainte en ordonnée a été normalisé en la divisant par une contrainte limite. L’avantage de cette méthode est qu’une seule équation représentant la courbe normalisée sera utilisée autant pour la vérification des éléments plats formant la section de la pièce que pour la vérification de la pièce elle-même.

L’équation générale contient aussi des paramètres variables dont la valeur sera ajustée en fonction du type de vérification (élément plat ou pièce) et du type d’alliage (traité thermiquement ou non). Les sections suivantes donneront plus de précisions sur cette méthode de calcul.

**5.3 Approches à la normalisation**

En pratique, il existe deux façon de présenter des règles pour le calcul des pièces et des parois comprimées, chacune comportant ses avantages et ses inconvénients.

La première méthode consiste à ne pas faire de distinction entre les pièces trapues, les pièces de longueur intermédiaire ou les pièces élancées, ni, à la rigueur, entre les pièces comprimées et les pièces fléchies (chapitre VI), et à utiliser, dans un graphique semblable à celui de la figure 5.2, une courbe de résistance continue normalisée. C’est le terme utilisé pour décrire une courbe tracée sur un graphique, dont l’élancement en abscisse est modifié (normalisé) selon une technique simple qui sera présentée à la sous-section 5.6.2[[8]](#footnote-8), et dont la résistance en ordonnée, souvent exprimée sous forme de contrainte, est rendue adimensionnelle en divisant la résistance calculée par la résistance limite donnée, pour le moment, par l’équation (5.1) ou par Fy, lorsque la résistance prend la forme d’une contrainte. La résistance limite, comme on le verra, peut varier pour tenir compte de divers phénomènes. Une telle courbe est présentée sur la figure 5.6 (voir acétate).

**Figure 5.6 – Courbe de résistance normalisée pour le calcul des pièces comprimées et fléchies**

C’est la méthode retenue par la norme canadienne et la norme européenne. Des équations adaptées, telles la formule Perry-Robertson ou la formule Ramberg-Osgood, sont généralement utilisées avec quelques variantes dans les normes pour tenir compte de la multitude de facteurs susceptibles d’affecter le comportement des pièces en alliages d’aluminium sollicitées en compression ou en flexion, ainsi que des parois sollicitées en compression. Ces facteurs seront passés en revue dans la section suivante.

Pour mieux couvrir tout l’éventail des résultats d’essais expérimentaux ou de simulations numériques disponibles dans la littérature, les normes optent parfois pour plus d’une courbe, toutes obtenues de la même équation de base. Ainsi, il peut y avoir une courbe pour les pièces en alliages de corroyage traités thermiquement (Fy de l’ordre de 200 à 300 MPa) et une autre pour les pièces en alliages non traitables thermiquement (Fy de l’ordre de 100 MPa), de même qu’une série de courbes pour tenir compte de la résistance au voilement et de la résistance post-voilement des parois traitées thermiquement ou non traitables thermiquement. C’est effectivement cette approche que les normes canadiennes et européennes ont adoptée.

Puisque la limite élastique des alliages structuraux varie entre 100 et 300 MPa, il semble logique d’utiliser une courbe normalisée pour évaluer la résistance des pièces et des parois en compression.

L’avantage de cette méthode est qu’une seule équation est utilisée avec quelques paramètres et constantes pour calculer toutes les résistances. Pour le cas considéré, il suffit d’insérer dans l’équation la valeur modifiée de l’élancement KL/r ou b/t (en fait, mb/t; voir l’équation 5.6[[9]](#footnote-9)) pour calculer la valeur normalisée de la résistance en compression. Si la courbe normalisée est disponible, on obtient directement la résistance en compression normalisée de la pièce ou de la paroi en utilisant le graphique avec la valeur modifiée de l’élancement.

La deuxième méthode, celle qu’à retenue la norme américaine de calcul des charpentes d’aluminium, consiste à reconnaître de façon explicite les pièces et les parois trapues, de longueur intermédiaire et élancées et à calculer pour diverses catégories d’alliages, la résistance en compression des pièces et des parois. Une représentation schématique des courbes considérées est présentée sur la figure 5.7[[10]](#footnote-10).

## Diapositive 31 :

* On peut utiliser cette figure (qui montre graphiquement l’équation précédente et qu’on retrouve dans le Commentaire sur la norme CSA S157) pour déterminer la contrainte de flambage normalisée connaissant l’élancement normalisé
* On peut aussi programmer cette formule dans un progiciel de calcul (Microsoft Excel par exemple)

# Variables influençant la résistance

## Diapositive 35 :

**5.4 Variables influençant la résistance**

Les principales variables susceptibles d’influencer le comportement des pièces et des parois en compression sont :

* les types d'alliages,
* la section des pièces,
* les variations d’épaisseur de la section,
* les défauts de rectitude,
* les contraintes résiduelles (particulièrement celles induites par le soudage),
* le degré de retenue aux extrémités des pièces.

On verra dans cette section comment chacune de ces variables affecte l’allure générale de la courbe montrée sur la figure 5.6 (voir acétate 28).

## Diapositive 36 et 37 :

**5.4.1 Les alliages**

L’information présentée à la section 5.3[[11]](#footnote-11) a permis de prendre conscience de la très grande influence que les alliages ont sur le comportement des pièces et des parois comprimées. Les commentaires qui suivent apporteront un complément d’information à cette problématique.

Comme nous l’avons vu, le flambement élastique des pièces comprimées est évalué à l’aide de l’équation (5.2), exprimée sous forme de contrainte sur la figure 5.7[[12]](#footnote-12). Il est possible, selon la méthode de Shanley, d’estimer le comportement des pièces de longueur intermédiaire (flambement inélastique), en remplaçant le module élastique E dans l’équation d’Euler par le module tangent (Et) défini sur la figure 5.9 (voir acétate 35). La courbe obtenue peut être remplacée de façon pratique par la droite d’équation B– Dλ proposée dans la référence (5.2[[13]](#footnote-13)) (figure 5.7).

**Figure 5.9 – Courbes contrainte-déformation des alliages ayant subi ou non un vieillissement artificiel**

Puisqu’il a été observé, selon la figure 5.9, que les courbes contrainte-déformation diffèrent de façon importante pour les alliages vieillis artificiellement et pour ceux qui ne le sont pas, on a cru bon, dans la norme américaine, de proposer une courbe pour chacun de ces groupes d’alliages.

Les normes canadiennes et européennes procèdent de la même façon, mais en utilisant les deux courbes normalisées montrées sur la figure 5.10 (voir acétate 36). Les variables et ont été définies à la section 5.3 (figure 5.6 – voir acétate 28).

Les recommandations de ces normes sont légèrement plus sécuritaires que celles de la norme américaine, surtout dans la zone la plus utilisée, se situant entre les valeurs de égales à 0,5 et 1,5. On notera toutefois que les opinions diffèrent entre parties, quant à la façon de regrouper les alliages.

Pour les Canadiens et les Européens, les alliages de corroyage sont regroupés selon les alliages traités thermiquement (séries 2000, 6000 et 7000) et les alliages non traitables thermiquement (séries 1000, 3000 et 5000). Dans le premier cas, l’état est identifié par un « T » et, dans le deuxième, par un « H ». Pour leur part, les Américains considèrent que le vieillissement artificiel distingue davantage les alliages, du point de vue structural. Rappelons que le vieillissement artificiel consiste à soumettre certains alliages traitables thermiquement (états T5 à T10) à une légère augmentation de température pendant une période prédéterminée, dans le but d’augmenter leur résistance (voir la figure 2.23[[14]](#footnote-14) et la sous-section 2.4.2).

**Figure5.10 – Comparaison des courbes de flambement des références (5.1) et (5.2) à quelques résultats expérimentaux**

## Diapositive 38 :

**5.4.2 La géométrie de la section des pièces**

Toutes les études démontrent que la géométrie de la section des pièces n’est pas une variable importante à considérer dans les calculs de résistance en compression. Les variations ne sont que de quelques pourcentages, d’un type de section à un autre. Ce constat peut surprendre, mais les résultats présentés sur la figure 5.11 (voir acétate) sont plutôt convaincants. Ils sont extraits d’un ensemble de résultats du même type obtenus en considérant plusieurs alliages structuraux courants. Sur la figure, chaque symbole représente une section de géométrie différente.

**Figure 5.11 – Influence de la géométrie des sections sur la résistance des pièces en compression**

## Diapositive 39 :

**5.4.3 Les variations d’épaisseur des parois**

La variation de l’épaisseur des parois d’une section par rapport aux dimensions nominales d’un profilé, peut induire des excentricités accidentelles qui, sous les charges de compression, ont pour effet de réduire la capacité de la pièce. Les résultats présentés sur la figure 5.12 (voir acétate) démontrent que cet effet est plus significatif que celui de la variation de géométrie de la section des pièces (sous-section 5.4.2[[15]](#footnote-15)) et qu’il est important d’en tenir compte. Toutefois, les standards de tolérance adoptés par l’industrie pour la fabrication des profilés, limitent les variations d’épaisseur des parois à des valeurs qui n’affectent pas les calculs de façon significative.

**Figure 5.12 – Influence de la variation de l’épaisseur des parois d’une section sur la résistance des pièces en compression**

## Diapositive 40 :

**5.4.5 Les contraintes résiduelles (soudage)**

Il a été clairement démontré que les contraintes résiduelles dans les profilés extrudés n’affectent pas de façon significative la résistance de ces profilés en compression et que leur effet peut être négligé. Ce n’est toutefois pas le cas pour les profilés soudés longitudinalement ou transversalement. La distribution des contraintes résiduelles sur la section transversale d’une pièce contenant des soudures longitudinales varie énormément d’une section à l’autre, à l’intérieur d’une même section ou le long d’une pièce, sur la section.

Ces contraintes en équilibre à l’intérieur de la section affectent grandement le comportement des pièces comprimées ou fléchies et il faut en tenir compte dans la dérivée des équations de calcul, dans le tracé des courbes de comportement normalisées ou dans l’évaluation des probabilités de rupture.

Pour simplifier l’étude de ce phénomène très complexe, plusieurs modèles de distribution des contraintes résiduelles ont été proposés. La figure 5.14 (voir acétate) présente quelques exemples pour des profilés soudés d’usage courant.

Les figures 2.25[[16]](#footnote-16) et 2.27[[17]](#footnote-17) montrent respectivement l’influence du soudage sur les alliages non traitables et traités thermiquement. La réduction de la limite élastique (Fy) causée par le soudage pour les alliages non traitables thermiquement est estimée à environ 10 % alors que pour les alliages traités thermiquement, elle est de l’ordre de 40 %. Il faut donc s’attendre à ce que la résistance des pièces en aluminium sollicitées en compression soit affectée de façon significative par le soudage.

Pour les pièces comportant des soudures longitudinales, il suffit d’appliquer le facteur de réduction Rm donné par l’équation (4.25[[18]](#footnote-18)) à la limite élastique (Fy) du métal de base. La limite élastique réduite (Fm) est alors obtenue de l’équation suivante (équation (4.24)) :

(5.3)

Les termes de cette équation ont été définis à la sous-section 4.4.4[[19]](#footnote-19). Rappelons que l’équation (5.3) doit être utilisée en considérant l’aire brute (Ag) de la section.

De plus, la contrainte (ou résistance) de flambement normalisée (), qui sera définie dans la prochaine section, doit être multipliée par le facteur suivant pour tenir compte des contraintes résiduelles puisque celles-ci ne sont pas pleinement considérées dans l’équation (5.3) :

(5.4)

La norme américaine recommande aussi l’utilisation de l’équation (5.3). Les constantes de flambement B, D et C, définies sur la figure 5.7[[20]](#footnote-20), doivent toutefois toujours être obtenues en considérant la catégorie des alliages non vieillis artificiellement (courbe 2 sur la figure 5.7), puisque la courbe σ – ε du métal soudé correspond davantage à celle de cette catégorie d’alliage (voir la figure 5.9 – voir acétate 35)

## Diapositive 41 et 42 :

Aw est l’aire de la zone affectée thermiquement

Pour les pièces comportant des soudures longitudinales, il suffit d’appliquer le facteur de réduction Rm donné par l’équation (4.25) à la limite élastique (Fy) du métal de base. La limite élastique réduite (Fm) est alors obtenue de l’équation suivante (équation (4.24) :

(5.3)

Les termes de cette équation ont été définis à la sous-section 4.4.4. Rappelons que l’équation (5.3) doit être utilisée en considérant l’aire brute (Ag) de la section.

De plus, la contrainte (ou résistance) de flambement normalisée (F), qui sera définie dans la prochaine section, doit être multipliée par le facteur suivant pour tenir compte des contraintes résiduelles puisque celles-ci ne sont pas pleinement considérées dans l’équation (5.3) :

(5.4)

La norme américaine recommande aussi l’utilisation de l’équation (5.3). Les constantes de flambement B, D et C, définies sur la figure 5.7, doivent toutefois toujours être obtenues en considérant la catégorie des alliages non vieillis artificiellement (courbe 2 sur la figure 5.7), puisque la courbe σ – ε du métal soudé correspond davantage à celle de cette catégorie d’alliage (voir la figure 5.9)

La figure 5.15 (voir acétate 40) montre bien que les techniques décrites ci-haut pour tenir compte de la présence de soudures longitudinales sur la section, simulent de façon acceptable les conditions réelles. Sur cette figure, les courbes de la figure 5.7 (courbe américaine) sont comparées à des résultats expérimentaux effectués sur des sections tubulaires d’alliages courants.

Les soudures transversales affectent aussi le comportement en compression des pièces en aluminium, comme en fait foi la figure 5.16 (voir acétate 41), sur laquelle quelques résultats expérimentaux sont comparés aux recommandations américaines de calcul.

Ces résultats confirment que les soudures transversales affaiblissent la pièce comprimée, peu importe leur localisation le long de la pièce. Les résultats expérimentaux sont toutefois très limités et ont été obtenus sur des sections de petite taille. On ne sait pas encore très bien comment ces résultats peuvent s’appliquer à des spécimens de plus grande taille. En l’absence de résultats d’études plus poussées sur le sujet, il est sécuritaire, selon la référence (5.11[[21]](#footnote-21)) de considérer que la pièce entière possède une limite élastique égale à celle de la zone affectée thermiquement (Fwy) dans les calculs de la résistance en compression.

La norme canadienne traite le sujet de façon un peu différente. Lorsqu’une soudure transversale est située près des extrémités d’une pièce, la contrainte limite (F0), qui sera définie à la sous-section 5.6.1, est considérée égale à la limite élastique (Fy) du métal de base, mais la contrainte de compression dans la section soudée située aux extrémités de la pièce est aussi limitée à Fwu (voir les tableaux 2.8 et 2.9). Lorsqu’une soudure transversale est située ailleurs qu’aux extrémités sur la pièce, Fo est considérée égal à Fwy.

**Figure 5.15 – Influence des soudures longitudinales sur la résistance des pièces en compression**

**Figure 5.16 – Influence des soudures transversales sur la résistance des pièces en compression**

## Diapositive 43 :

**5.4.6 Le degré de retenue aux extrémités des pièces**

Un effort de recherche considérable a été fait, aux cours des dernières décennies, pour tenter d’évaluer l’influence du degré de retenue aux extrémités des pièces comprimées. Les références sont trop nombreuses pour être citées mais certaines, parmi les plus importantes, peuvent être trouvées dans la référence (5.7[[22]](#footnote-22)).

Tous les modèles d’analyse, y compris ceux de ce chapitre, sont basés sur des pièces comprimées avec conditions de retenue idéalisées aux extrémités. On tenait compte de façon approximative de la retenue offerte par les poutres, les fondations et les assemblages en faisant appel au concept de longueur effective mentionné précédemment. Même si on se doutait que le degré de retenue offert par les assemblages jouait un rôle prépondérant sur le comportement d’ensemble des pièces comprimées, une étude approfondie de cet effet faisait défaut, il n’y a pas encore si longtemps.

La figure 5.17 (voir acétate) illustre, à sa façon, l’importance de ce paramètre. Même si l’étude a été réalisée sur des charpentes d’acier, les résultats sont directement transposables aux charpentes d’aluminium.

**Figure 5.17 – Influence du degré de retenue aux extrémités des pièces sur la résistance en compression**

On note que l’influence du degré de retenue aux extrémités des pièces est moins grande pour les pièces de faible élancement. Ce point a d’ailleurs été démontré par plusieurs chercheurs. Si, à titre d’exemple, on traçait, sur la figure 5.17, les courbes de comportement pour une pièce quelconque, en considérant des retenues aux extrémités qui correspondent à des valeurs de K égales à 0,8 et 1,5, on obtiendrait des différences de résistance allant de 10 à 190 % pour des valeurs d’élancement normalisées comprises entre 0,4 et 1,25.

Même si les assemblages mentionnés sur la figure 5.17 sont des assemblages souples, leur influence sur la résistance ultime est relativement importante et, par conséquent, il est essentiel d’en tenir compte dans les calculs. Quelle que soit la méthode utilisée, il faut connaître les courbes de comportement des assemblages et c'est là que réside la difficulté de mise en application de ces techniques puisque cette information est soit difficile à obtenir, soit incomplète, ou simplement inexistante.

Dans les cas simples, il existe un moyen pratique et généralement sécuritaire de tenir compte du degré de retenue aux extrémités des pièces comprimées. La méthode consiste à considérer une longueur effective KL dans le calcul de l’élancement (λ) des pièces.

Le concept de longueur effective a été introduit à la section 5.2 pour généraliser l’équation d’Euler qui permet de calculer la résistance au flambement élastique d’une pièce comprimée. Le modèle d’Euler consiste en un poteau parfaitement droit, articulé à ses deux extrémités. Si on désire appliquer ce modèle au cas plus général d’une pièce dont les assemblages aux extrémités offrent un certain degré de retenue flexionnelle, il faut introduire dans l’équation (3.34[[23]](#footnote-23)) un coefficient K qui nous conduit à l’équation (5.2[[24]](#footnote-24)). Cette dernière équation est utilisée dans presque toutes les normes de calcul. **Le terme KL dans ces équations est communément appelé *longueur* effective et le coefficient K est, par conséquent, *le coefficient de longueur effective***.

## Diapositive 44 :

Le concept de longueur effective a été introduit à la section 5.2 pour généraliser l’équation d’Euler qui permet de calculer la résistance au flambement élastique d’une pièce comprimée. Le modèle d’Euler consiste en un poteau parfaitement droit, articulé à ses deux extrémités. Si on désire appliquer ce modèle au cas plus général d’une pièce dont les assemblages aux extrémités offrent un certain degré de retenue flexionnelle, il faut introduire dans l’équation (3.34) un coefficient K qui nous conduit à l’équation (5.2). Cette dernière équation est utilisée dans presque toutes les normes de calcul. Le terme KL dans ces équations est communément appelé longueur effective et le coefficient K est, par conséquent, le coefficient de longueur effective.

Il y a deux aspects à considérer dans l’étude des conditions de retenue. D’abord, le degré de rigidité de la retenue, variant de zéro à l’infini et dont les limites correspondent à une rotule sans friction et un encastrement parfait respectivement; ensuite, le déplacement latéral d’une extrémité d’un poteau par rapport à l’autre, qui est soit permis, soit empêché. On tient compte des conditions de retenue, comme on vient de le mentionner, en introduisant le coefficient de longueur effective (K) dans l’équation (3.34) pour obtenir l’équation (5.2).

La longueur effective (KL) est définie comme étant la longueur d’un poteau articulé équivalent qui donne la même charge critique que le poteau dont les extrémités sont retenues en flexion. Physiquement, la longueur effective est la distance séparant les deux points d’inflexion de la déformée du poteau après flambement (points de moments nuls réels ou imaginaires). Il en découle que le coefficient de longueur effective est le rapport de la longueur du poteau équivalent sur la longueur du poteau réel. Pour le poteau ayant servi à dériver la charge d’Euler (figure 3.13[[25]](#footnote-25) ou 3.14[[26]](#footnote-26)), ce rapport est évidemment égal à 1,0 puisque la distance entre les points de moment nul est égale à la longueur réelle du poteau (K = 1,0).

## Diapositive 45 et 46 :

On peut facilement démontrer que pour les pièces retenues dont les extrémités ne sont pas libres de subir des déplacements relatifs, les valeurs de K sont toujours inférieures ou égales à l’unité (K 1,0) et que, dans le cas des pièces retenues dont les extrémités sont libres de subir des déplacements relatifs, le coefficient de longueur effective est toujours supérieur ou égal à l’unité (K 1,0).

La figure 5.18a présente les coefficients de longueur effective obtenus pour six cas pratiques de pièces avec extrémités articulées ou encastrées et avec déplacement relatif des extrémités permis ou empêché. Il est recommandé d’utiliser les valeurs suggérées qui reconnaissent la difficulté de fournir, en pratique, un encastrement parfait à l’extrémité d’une pièce. La rotule parfaite, non plus, n’existe pas puisqu’il y a toujours une certaine retenue qui se développe à l’extrémité d’une pièce, même si l’assemblage est conçu pour être très souple. Il est toutefois sécuritaire de négliger cette retenue et de considérer l’extrémité de la pièce comme étant parfaitement articulée.

On constate l’importance du déplacement relatif des extrémités de la pièce dans les calculs des charges critiques de flambement, lorsqu’on compare les valeurs de K pour les cas (b) et (e) sur la figure 5.18a. La charge critique est, en effet, huit fois plus élevée lorsque la pièce ne subit pas de déplacement relatif de ses extrémités ().

Trois autres conditions de retenue sont présentées sur la figure 5.18 pour couvrir le champ du flambement en torsion. Ce mode de flambement sera étudié dans les sections qui suivent.

La figure 5.19 (voir acétate 45), tirée de la référence (5.1) est un autre exemple d’utilisation pratique du coefficient de longueur effective. Cette figure propose une série de valeurs de K pour tenir compte de divers degrés de retenue aux extrémités ou le long de cornières simples dans les treillis.

Un traitement beaucoup plus approfondi du concept de longueur effective peut être trouvé dans les références (5.7) et (5.8).

**Figure 5.18 – Valeurs pratiques du coefficient de longueur effective (voir acétate 44)**

**Figure 5.19 – Coefficients de longueur effective pour structures à treillis constituées, entre autres, de cornières**

# Voilement des parois minces

## Diapositive 50 :

De façon évidente, on évite d’utiliser les barres et les plaques non raidies pour résister aux charges de compression. Les cornières, les profilés en C et en T, de même que les tubes sont souvent utilisés dans les treillis, les poutrelles ajourées et les systèmes de contreventement. Comme poteaux dans les bâtiments et comme pièces en compression dans les ponts, on utilise généralement des profilés en I ainsi que des tubes carrés et rectangulaires, simples ou composés. Le calcul des pièces à section composée sera étudié plus loin dans ce chapitre.

Le chapitre V doit être considéré comme un des chapitres pivots de ce volume. Les concepts les plus importants sont étudiés aux sections 5.5 (voilement des parois minces) et 5.6 (flambement des pièces). Les sections qui précèdent (5.1 à 5.4) sont plutôt descriptives et servent d’introduction aux sections 5.5 et 5.6, alors que les sections qui suivent (5.7 à 5.10) décrivent les applications particulières (résistance des pièces à section composée, des panneaux plats raidis, des parois courbes, des tubes et des panneaux sandwich). La section 5.11 traite de la torsion en général et la section 5.12 conclut en présentant sept exemples de calcul qui couvrent essentiellement toute la matière.

## Diapositive 51 :

Les parois en aluminium des sections types utilisées peuvent être assimilées à des éléments plats de largeur (b) et d’épaisseur (t) données (voir figure 5.3[[27]](#footnote-27)). Ces éléments plats peuvent reposer sur une ou deux rives longitudinales. Les rives de l’élément peuvent être considérées comme simplement appuyées et un certain degré de retenue peut être offert par les éléments adjacents. L’élancement d’un élément plat (λ) se calcule à l’aide de l’équation suivante (S157 art. 8.1) :

(5.6)

où

m : coefficient de voilement

b : largeur de l’élément

t : épaisseur de l’élément

**Figure 5.3 – Appuis des éléments plats**

# Voilement des éléments plats

## Diapositive 57 :

Les parois se comportent de façon similaire aux pièces en compression et la courbe de la figure 5.2[[28]](#footnote-28) s’applique aussi bien à cette catégorie de pièces comprimées. Les seules différences résident dans la définition de l’élancement de la paroi et dans la capacité de cette dernière à résister davantage aux accroissements de charges après le voilement (flambement d’une paroi), lorsque les conditions de retenue sur les bords le permettent. Ce phénomène s’appelle résistance post-flambement.

Comme on l’a fait pour les pièces comprimées, considérons les trois parois illustrées sur la figure 5.4[[29]](#footnote-29), pour lesquelles la longueur (L) et l’épaisseur (t) demeurent constantes, mais dont la largeur (b) varie. Dans le cas considéré, un des bords est libre et l’autre est retenu transversalement. La paroi est toutefois libre de tourner autour de l’axe x-x indiqué sur la figure 5.4a. C’est, pour la paroi, l’équivalent d’un appui simple pour une poutre. On peut, dès à présent, entrevoir pour les parois toutes les conditions de retenue sur les bords et toutes les combinaisons de retenue possibles (simple-libre, simple-simple, simple-encastré, encastré-encastré, etc.).

Pour la paroi trapue de la figure 5.4a, la charge de compression peut être augmentée jusqu’à ce que toute la section se plastifie, sans que la paroi ne se déforme transversalement. La résistance de la paroi est alors égale à la résistance donnée par l’équation (5.1[[30]](#footnote-30)), tel qu’indiqué sur la figure 5.2.

Note : Parois de longueur et d’épaisseur constantes, mais de largeur variable.

**Figure 5.4 – Modes de rupture des parois comprimées**

Si on augmente la largeur de la paroi et qu’on garde les autres dimensions constantes (figure 5.4b), la paroi finit par voiler sous la charge de compression croissante, à une valeur de la charge inférieure à Cy. Le voilement survient avant que la contrainte moyenne n’atteigne Fy sur toute la section. Les contraintes sont augmentées dans la portion déformée de la paroi et atteignent facilement la limite élastique. C’est la raison pour laquelle la paroi demeure déformée de façon permanente après que l’on ait retiré la charge. C’est le voilement inélastique, décrit par la portion centrale de la courbe de la figure 5.2, à la seule différence que l’élancement de l’élément comprimé est maintenant défini par le rapport b/t.

Si on augmente à nouveau la largeur b (figure 5.4c), et qu’on sollicite en compression la paroi élancée ainsi obtenue, on obtient éventuellement une rupture par voilement élastique du bord libre de la paroi, à une valeur de la charge nettement plus faible que dans le cas précédent. Lorsqu’on enlève la charge, la paroi retourne à sa forme initiale.

On constate toutefois que dans sa portion la moins déformée près du support, la paroi est encore capable de résister à un accroissement de la charge, contrairement à la pièce élancée de la figure 5.3c. Il en sera ainsi jusqu’à ce que la portion encore effective de la paroi n’atteigne Fy. Cette résistance additionnelle, comme on l’a entrevu précédemment, s'appelle la résistance post-flambement ou post-voilement, et est assez importante pour être considérée dans les calculs. Elle a pour effet de soulever la courbe montrée sur la figure 5.2 à un niveau approximatif indiquée par la courbe en traits longs discontinus.

On réalise que ce sont les parois élancées (figures 5.4c et 5.2) qui bénéficient le plus de ce surplus de résistance. Même si on n’y a pas fait allusion plus haut, lorsqu’on a considéré le comportement de la paroi de la figure 5.4b, ce phénomène s’applique aussi aux parois de largeur intermédiaire, mais dans une moindre mesure, comme on le constate sur la figure 5.2. La norme américaine ne considère la résistance post-flambement que pour les parois élancées qui voilent élastiquement, comme nous le verrons à la section 5.5[[31]](#footnote-31). Elle reconnaît toutefois le surplus de résistance des parois retenues sur un seul bord, ce que ne fait pas la norme canadienne.

La résistance post-flambement est plus significative pour les parois retenues sur les deux bords longitudinaux que pour les parois avec un bord libre, telle celle montrée sur la figure 5.4. La courbe en traits longs discontinus montrée sur la figure 5.2 est alors davantage soulevée. C’est ce même phénomène que l’on observe dans les parois d’âme raidies des poutres assemblées, comme on le verra au chapitre suivant. Dans ce dernier cas, les panneaux d’âme sont retenus sur les quatre côtés et sont sollicités en cisaillement. Le phénomène est le même.

Il est important d’insister sur le fait que le phénomène de post-flambement ou de post-voilement ne s’applique pas au flambement global des pièces qui, comme on le constate sur la figure 5.3, ne sont pas supportées sur les bords. Le phénomène ne concerne que les parois raidies qui constituent la section des pièces comprimées. C’est de cette façon que les pièces en bénéficient. Si les parois constituant une section offrent plus de résistance après le voilement, la section est plus résistante et la pièce est, par conséquent, plus résistante.

En pratique, ce ne sont pas les pièces dont la principale fonction est de résister aux charges, qui tirent avantage de la résistance post-voilement, puisque ces dernières se situent généralement dans la zone d’élancement intermédiaire où, comme on le voit sur la figure 5.2, l’effet est moins significatif. La résistance ultime des parois minces devient intéressante lorsqu’une pièce ou un élément de pièce est conçu pour remplir d’autres fonctions, lorsque la résistance a une importance plus secondaire, et lorsque de légères déformations des parois sont acceptables au niveau des charges non pondérées.

# Modes de rupture des éléments plats

## Diapositive 61 :

Comme on l’a fait pour les pièces comprimées, considérons les trois parois illustrées sur la figure 5.4 (voir acétate), pour lesquelles la longueur (L) et l’épaisseur (t) demeurent constantes, mais dont la largeur (b) varie. Dans le cas considéré, un des bords est libre et l’autre est retenu transversalement. La paroi est toutefois libre de tourner autour de l’axe x-x indiqué sur la figure 5.4a. C’est, pour la paroi, l’équivalent d’un appui simple pour une poutre. On peut, dès à présent, entrevoir pour les parois toutes les conditions de retenue sur les bords et toutes les combinaisons de retenue possibles (simple-libre, simple-simple, simple-encastré, encastré-encastré, etc.).

Pour la paroi trapue de la figure 5.4a, la charge de compression peut être augmentée jusqu’à ce que toute la section se plastifie, sans que la paroi ne se déforme transversalement. La résistance de la paroi est alors égale à la résistance donnée par l’équation (5.1), tel qu’indiqué sur la figure 5.2.

Note : Parois de longueur et d’épaisseur constantes, mais de largeur variable.

**Figure 5.4 – Modes de rupture des parois comprimées**

Si on augmente la largeur de la paroi et qu’on garde les autres dimensions constantes (figure 5.4b), la paroi finit par voiler sous la charge de compression croissante, à une valeur de la charge inférieure à Cy. Le voilement survient avant que la contrainte moyenne n’atteigne Fy sur toute la section. Les contraintes sont augmentées dans la portion déformée de la paroi et atteignent facilement la limite élastique. C’est la raison pour laquelle la paroi demeure déformée de façon permanente après que l’on ait retiré la charge. C’est le voilement inélastique, décrit par la portion centrale de la courbe de la figure 5.2, à la seule différence que l’élancement de l’élément comprimé est maintenant défini par le rapport b/t.

Si on augmente à nouveau la largeur b (figure 5.4c), et qu’on sollicite en compression la paroi élancée ainsi obtenue, on obtient éventuellement une rupture par voilement élastique du bord libre de la paroi, à une valeur de la charge nettement plus faible que dans le cas précédent. Lorsqu’on enlève la charge, la paroi retourne à sa forme initiale.

On constate toutefois que dans sa portion la moins déformée près du support, la paroi est encore capable de résister à un accroissement de la charge, contrairement à la pièce élancée de la figure 5.3c. Il en sera ainsi jusqu’à ce que la portion encore effective de la paroi n’atteigne Fy. Cette résistance additionnelle, comme on l’a entrevu précédemment, s'appelle la résistance post-flambement ou post-voilement, et est assez importante pour être considérée dans les calculs. Elle a pour effet de soulever la courbe montrée sur la figure 5.2 à un niveau approximatif indiquée par la courbe en traits longs discontinus. On réalise que ce sont les parois élancées (figures 5.4c et 5.2) qui bénéficient le plus de ce surplus de résistance. Même si on n’y a pas fait allusion plus haut, lorsqu’on a considéré le comportement de la paroi de la figure 5.4b, ce phénomène s’applique aussi aux parois de largeur intermédiaire, mais dans une moindre mesure, comme on le constate sur la figure 5.2. La norme américaine ne considère la résistance post-flambement que pour les parois élancées qui voilent élastiquement, comme nous le verrons à la section 5.5. Elle reconnaît toutefois le surplus de résistance des parois retenues sur un seul bord, ce que ne fait pas la norme canadienne.

La résistance post-flambement est plus significative pour les parois retenues sur les deux bords longitudinaux que pour les parois avec un bord libre, telle celle montrée sur la figure 5.4. La courbe en traits longs discontinus montrée sur la figure 5.2 est alors davantage soulevée. C’est ce même phénomène que l’on observe dans les parois d’âme raidies des poutres assemblées, comme on le verra au chapitre suivant. Dans ce dernier cas, les panneaux d’âme sont retenus sur les quatre côtés et sont sollicités en cisaillement. Le phénomène est le même.

Il est important d’insister sur le fait que le phénomène de post-flambement ou de post-voilement ne s’applique pas au flambement global des pièces qui, comme on le constate sur la figure 5.3, ne sont pas supportées sur les bords. Le phénomène ne concerne que les parois raidies qui constituent la section des pièces comprimées. C’est de cette façon que les pièces en bénéficient. Si les parois constituant une section offrent plus de résistance après le voilement, la section est plus résistante et la pièce est, par conséquent, plus résistante.

En pratique, ce ne sont pas les pièces dont la principale fonction est de résister aux charges, qui tirent avantage de la résistance post-voilement, puisque ces dernières se situent généralement dans la zone d’élancement intermédiaire où, comme on le voit sur la figure 5.2, l’effet est moins significatif. La résistance ultime des parois minces devient intéressante lorsqu’une pièce ou un élément de pièce est conçu pour remplir d’autres fonctions, que la résistance a une importance plus secondaire, et que de légères déformations des parois sont acceptables au niveau des charges non pondérées.

## Diapositive 62 :

Les parois se comportent de façon similaire aux pièces en compression et la courbe de la figure 5.2 s’applique aussi bien à cette catégorie de pièces comprimées. Les seules différences résident dans la définition de l’élancement de la paroi et dans la capacité de cette dernière à résister davantage aux accroissements de charges après le voilement (flambement d’une paroi), lorsque les conditions de retenue sur les bords le permettent. Ce phénomène s’appelle résistance post-flambement.

Comme on l’a fait pour les pièces comprimées, considérons les trois parois illustrées sur la figure 5.4, pour lesquelles la longueur (L) et l’épaisseur (t) demeurent constantes, mais dont la largeur (b) varie. Dans le cas considéré, un des bords est libre et l’autre est retenu transversalement. La paroi est toutefois libre de tourner autour de l’axe x-x indiqué sur la figure 5.4a. C’est, pour la paroi, l’équivalent d’un appui simple pour une poutre. On peut, dès à présent, entrevoir pour les parois toutes les conditions de retenue sur les bords et toutes les combinaisons de retenue possibles (simple-libre, simple-simple, simple-encastré, encastré-encastré, etc.).

Pour la paroi trapue de la figure 5.4a, la charge de compression peut être augmentée jusqu’à ce que toute la section se plastifie, sans que la paroi ne se déforme transversalement. La résistance de la paroi est alors égale à la résistance donnée par l’équation (5.1), tel qu’indiqué sur la figure 5.2.

**Figure 5.4 – Modes de rupture des parois comprimées**

Si on augmente la largeur de la paroi et qu’on garde les autres dimensions constantes (figure 5.4b), la paroi finit par voiler sous la charge de compression croissante, à une valeur de la charge inférieure à Cy. Le voilement survient avant que la contrainte moyenne n’atteigne Fy sur toute la section. Les contraintes sont augmentées dans la portion déformée de la paroi et atteignent facilement la limite élastique. C’est la raison pour laquelle la paroi demeure déformée de façon permanente après que l’on ait retiré la charge. C’est le voilement inélastique, décrit par la portion centrale de la courbe de la figure 5.2, à la seule différence que l’élancement de l’élément comprimé est maintenant défini par le rapport b/t.

Si on augmente à nouveau la largeur b (figure 5.4c), et qu’on sollicite en compression la paroi élancée ainsi obtenue, on obtient éventuellement une rupture par voilement élastique du bord libre de la paroi, à une valeur de la charge nettement plus faible que dans le cas précédent. Lorsqu’on enlève la charge, la paroi retourne à sa forme initiale.

On constate toutefois que dans sa portion la moins déformée près du support, la paroi est encore capable de résister à un accroissement de la charge, contrairement à la pièce élancée de la figure 5.3c. Il en sera ainsi jusqu’à ce que la portion encore effective de la paroi n’atteigne Fy. Cette résistance additionnelle, comme on l’a entrevu précédemment, s'appelle la résistance post-flambement ou post-voilement, et est assez importante pour être considérée dans les calculs. Elle a pour effet de soulever la courbe montrée sur la figure 5.2 à un niveau approximatif indiquée par la courbe en traits longs discontinus. On réalise que ce sont les parois élancées (figures 5.4c et 5.2) qui bénéficient le plus de ce surplus de résistance. Même si on n’y a pas fait allusion plus haut, lorsqu’on a considéré le comportement de la paroi de la figure 5.4b, ce phénomène s’applique aussi aux parois de largeur intermédiaire, mais dans une moindre mesure, comme on le constate sur la figure 5.2. La norme américaine ne considère la résistance post-flambement que pour les parois élancées qui voilent élastiquement, comme nous le verrons à la section 5.5. Elle reconnaît toutefois le surplus de résistance des parois retenues sur un seul bord, ce que ne fait pas la norme canadienne.

La résistance post-flambement est plus significative pour les parois retenues sur les deux bords longitudinaux que pour les parois avec un bord libre, telle celle montrée sur la figure 5.4. La courbe en traits longs discontinus montrée sur la figure 5.2 est alors davantage soulevée. C’est ce même phénomène que l’on observe dans les parois d’âme raidies des poutres assemblées, comme on le verra au chapitre suivant. Dans ce dernier cas, les panneaux d’âme sont retenus sur les quatre côtés et sont sollicités en cisaillement. Le phénomène est le même.

Il est important d’insister sur le fait que le phénomène de post-flambement ou de post-voilement ne s’applique pas au flambement global des pièces qui, comme on le constate sur la figure 5.3, ne sont pas supportées sur les bords. Le phénomène ne concerne que les parois raidies qui constituent la section des pièces comprimées. C’est de cette façon que les pièces en bénéficient. Si les parois constituant une section offrent plus de résistance après le voilement, la section est plus résistante et la pièce est, par conséquent, plus résistante.

En pratique, ce ne sont pas les pièces dont la principale fonction est de résister aux charges, qui tirent avantage de la résistance post-voilement, puisque ces dernières se situent généralement dans la zone d’élancement intermédiaire où, comme on le voit sur la figure 5.2, l’effet est moins significatif. La résistance ultime des parois minces devient intéressante lorsqu’une pièce ou un élément de pièce est conçu pour remplir d’autres fonctions, que la résistance a une importance plus secondaire, et que de légères déformations des parois sont acceptables au niveau des charges non pondérées.

# Élancement des éléments plats

## Diapositive 66 :

**5.5 Voilement des parois minces**

**5.5.1 Élancement normalisé**

On étudie le voilement en considérant le comportement d’une paroi d’épaisseur t et de largeur b, soumise à une contrainte de compression uniforme, tel que montré sur la figure 5.10[[32]](#footnote-32). La contrainte de compression critique Fc est obtenue en résolvant l’équation différentielle de la déformée de la paroi pour diverses conditions de retenue des bords non sollicités. La solution du problème est classique et on trouvera plus de détails dans les références (5.17) et (5.18)[[33]](#footnote-33).

La contrainte de voilement (ou flambement) élastique est donnée par l’équation suivante, où b/t est le rapport d’élancement, ν est le coefficient de Poisson (0,33) et E est le module d’élasticité (70 000 MPa).

(5.5)

Dans cette équation, le paramètre k tient compte des conditions de retenue le long des bords (figure 5.20[[34]](#footnote-34)). L’équation (5.5) est semblable à toutes les équations de stabilité élastique, c’est-à-dire que la contrainte élastique est inversement proportionnelle au carré de l’élancement. Quand l’élancement tend vers zéro, la contrainte élastique devient infinie, ce qui physiquement est inadmissible. Il y a donc une limite supérieure à Fcr. Cette limite est égale à Fy, la limite élastique du matériau. Si on met l’équation (5.5) en graphique, en fonction de l’élancement b/t, on obtient la courbe montrée sur la figure 5.21[[35]](#footnote-35). Lorsque le matériau se plastifie, au lieu d’utiliser E dans l’équation (5.5), on utilise le module tangent (Et), comme on l’a fait précédemment pour les pièces comprimées, afin d’obtenir le tronçon intermédiaire de la courbe de résistance. On constate ainsi que la courbe obtenue est tout à fait semblable à celles obtenues précédemment pour les pièces en compression.

## Diapositive 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73 et 74 :

**5.5.4 Parois retenues sur les deux bords**

Chaque paroi d’une section peut être considérée individuellement pour l’étude de sa capacité à résister aux charges de compression uniformes ou non uniformes qui la sollicitent. Les parois peuvent être planes ou courbes. La figure 5.26[[36]](#footnote-36) présente les différentes conditions de retenue que l’on peut rencontrer dans la pratique.

Chacun de ces éléments possède un élancement qui le caractérise et qui varie en fonction du type de chargement, du choix et de la disposition des raidisseurs, de la géométrie de la section, etc. La façon d’aborder le problème est, pour chaque cas, de définir une équation pour le calcul de λ (équations 5.6 et 5.7) et d’utiliser cet élancement pour calculer l’élancement normalisé à l’aide de l’équation (5.8[[37]](#footnote-37)). Ce dernier servira à calculer la contrainte normalisée , obtenue de l’équation (5.10[[38]](#footnote-38)) qui, à son tour, sera utilisée pour calculer la contrainte de résistance au flambement Fc donnée par l’équation (5.13[[39]](#footnote-39)).

La présente sous-section, ainsi que les suivantes, seront consacrée à la présentation d’équations pour le calcul de l’élancement de la plupart des cas identifiés sur la figure 5.26. Les cas spéciaux des tubes et des parois courbes, raidies longitudinalement ou non, seront traités à la sous-section 5.9.

Le cas (a), sur la figure 5.26, est le modèle de référence qui n’a pas vraiment d’application pratique, à l’exception de fait qu’il donne une indication sur la limite supérieure de l’élancement d’une paroi comprimée retenue sur les deux bords.

L’élancement varie en fonction du type de chargement imposé à la paroi, tel qu’indiqué sur la figure 5.27 (voir acétate 69). L’équation (5.7) conduit aux approximations (5.19) et (5.20) pour le calcul de m dans l’équation (5.6). La contrainte de compression maximale sollicitant la paroi est dénotée f1 et elle est toujours négative. La contrainte à l’autre extrémité de la paroi est dénotée f2 et est positive si elle correspond à de la traction. Le rapport f2/f1 est appelé .

(5.18)

Pour -1 1

(5.19)

Pour -1

(5.20)

On calcul facilement la valeur de m égale à 1.65, lorsque = 1, en utilisant = 4,0, tiré de la figure 5.20, dans l’équation (5.7).

Lorsque la paroi est reliée sur ses deux bords à d’autres éléments qui sont eux-mêmes supportés sur les deux bords, comme sur la figure 5.26b, et que la charge de compression est relativement uniforme, la paroi est beaucoup plus stable que dans le cas précédent et l’élancement est réduit de façon significative. La figure 5.24b présente deux sections qui satisfont ces critères. Le profilé en C ne se qualifie pas puisque les ailes ne sont pas reliées entre elles ou raidies à l’autre extrémité.

Dans ce cas, la variable m de l’équation (5.6) est évaluée à l’aide des équations qui suivent.

Note f1 = contrainte maximale de compression (négative)

f2 = contrainte à l’autre extrémité (positive si traction)

# Élancement normalisé des éléments plats (parois)

## Diapositive 85, 86 et 87 :

**5.5 Voilement des parois minces**

**5.5.1 Élancement normalisé**

On étudie le voilement en considérant le comportement d’une paroi d’épaisseur t et de largeur b, soumise à une contrainte de compression uniforme, tel que montré sur la figure 5.10. La contrainte de compression critique Fc est obtenue en résolvant l’équation différentielle de la déformée de la paroi pour diverses conditions de retenue des bords non sollicités. La solution du problème est classique et on trouvera plus de détails dans les références (5.17) et (5.18).

La contrainte de voilement (ou flambement) élastique est donnée par l’équation suivante, où b/t est le rapport d’élancement, ν est le coefficient de Poisson (0,33) et E est le module d’élasticité (70 000 MPa).

(5.5)

Dans cette équation, le paramètre k tient compte des conditions de retenue le long des bords (figure 5.20). L’équation (5.5) est semblable à toutes les équations de stabilité élastique; c’est-à-dire que la contrainte élastique est inversement proportionnelle au carré de l’élancement. Quand l’élancement tend vers zéro, la contrainte élastique devient infinie, ce qui physiquement est inadmissible. Il y a donc une limite supérieure à Fcr. Cette limite est égale à Fy, la limite élastique du matériau. Si on met l’équation (5.5) en graphique, en fonction de l’élancement b/t, on obtient la courbe montrée sur la figure 5.21. Lorsque le matériau se plastifie, au lieu d’utiliser E dan s l’équation (5.5), on utilise le module tangent (Et), comme on l’a fait précédemment pour les pièces comprimées, afin d’obtenir le tronçon intermédiaire de la courbe de résistance. On constate ainsi que la courbe obtenue est tout à fait semblable à celles obtenues précédemment pour les pièces en compression.

# Contrainte de flambement normalisée des éléments plats (parois)

## Diapositive 90 :

**5.5 Voilement des parois minces**

**5.5.1 Élancement normalisé**

On étudie le voilement en considérant le comportement d’une paroi d’épaisseur t et de largeur b, soumise à une contrainte de compression uniforme, tel que montré sur la figure 5.10. La contrainte de compression critique Fc est obtenue en résolvant l’équation différentielle de la déformée de la paroi pour diverses conditions de retenue des bords non sollicités. La solution du problème est classique et on trouvera plus de détails dans les références (5.17) et (5.18).

**Figure 5.20 – Voilement d’une paroi mince en compression pure**

La contrainte de voilement (ou flambement) élastique est donnée par l’équation suivante, où b/t est le rapport d’élancement, ν est le coefficient de Poisson (0,33) et E est le module d’élasticité (70 000 MPa).

(5.5)

Dans cette équation, le paramètre k tient compte des conditions de retenue le long des bords (figure 5.20). L’équation (5.5) est semblable à toutes les équations de stabilité élastique, c’est-à-dire que la contrainte élastique est inversement proportionnelle au carré de l’élancement.

Quand l’élancement tend vers zéro, la contrainte élastique devient infinie, ce qui physiquement est inadmissible. Il y a donc une limite supérieure à Fcr. Cette limite est égale à Fy, la limite élastique du matériau. Si on met l’équation (5.5) en graphique, en fonction de l’élancement b/t, on obtient la courbe montrée sur la figure 5.21. Lorsque le matériau se plastifie, au lieu d’utiliser E dans l’équation (5.5), on utilise le module tangent (Et), comme on l’a fait précédemment pour les pièces comprimées, afin d’obtenir le tronçon intermédiaire de la courbe de résistance. On constate ainsi que la courbe obtenue est tout à fait semblable à celles obtenues précédemment pour les pièces en compression.

**Figure 5.21 – Courbe de voilement d’une paroi mince**

# Contrainte de flambement (voilement) des éléments plats (parois)

## Diapositive 95 :

**5.5 Voilement des parois minces**

**5.5.1 Élancement normalisé**

On étudie le voilement en considérant le comportement d’une paroi d’épaisseur t et de largeur b, soumise à une contrainte de compression uniforme, tel que montré sur la figure 5.10. La contrainte de compression critique Fc est obtenue en résolvant l’équation différentielle de la déformée de la paroi pour diverses conditions de retenue des bords non sollicités. La solution du problème est classique et on trouvera plus de détails dans les références (5.17) et (5.18).

La contrainte de voilement (ou flambement) élastique est donnée par l’équation suivante, où b/t est le rapport d’élancement, ν est le coefficient de Poisson (0,33) et E est le module d’élasticité (70 000 MPa).

(5.5)

Dans cette équation, le paramètre k tient compte des conditions de retenue le long des bords (figure 5.20). L’équation (5.5) est semblable à toutes les équations de stabilité élastique, c’est-à-dire que la contrainte élastique est inversement proportionnelle au carré de l’élancement. Quand l’élancement tend vers zéro, la contrainte élastique devient infinie, ce qui physiquement est inadmissible. Il y a donc une limite supérieure à Fcr. Cette limite est égale à Fy, la limite élastique du matériau. Si on met l’équation (5.5) en graphique, en fonction de l’élancement b/t, on obtient la courbe montrée sur la figure 5.21. Lorsque le matériau se plastifie, au lieu d’utiliser E dans l’équation (5.5), on utilise le module tangent (Et), comme on l’a fait précédemment pour les pièces comprimées, afin d’obtenir le tronçon intermédiaire de la courbe de résistance. On constate ainsi que la courbe obtenue est tout à fait semblable à celles obtenues précédemment pour les pièces en compression.

# Flambement des pièces

## Diapositive 100 :

**5.6 Flambement des pièces**

**5.6.1 Contrainte limite**

La contrainte limite (Fo) a été introduite à la sous-section 5.5.2. On la trouve dans l’équation (5.10) qui décrit la courbe de flambement normalisée, tracée sur la figure 5.22[[40]](#footnote-40) pour deux groupes d’alliages. La contrainte limite porte son nom puisqu’elle définit l’état limite qui se situe dans la partie supérieure de la courbe, à des valeurs de λ approchant zéro.

Pour les parois, la contrainte limite (Fo) a toujours été considérée égale à la limite élastique (Fy) puisque cette dernière représente le seul état limite susceptible d’affecter la résistance des parois à des valeurs d’élancement approchant zéro.

Pour les pièces sollicitées en compression, il existe plusieurs états limites qui peuvent être définis par Fo. Ils seront tous identifiés dans la présente section.

**Contrainte limite optimale**

Lorsqu’il n’y a pas de soudure ni de voilement local des parois constituant la section,

(5.33)

**Voilement d’une aile avec bord libre**

Lorsque la section comprimée contient une aile supportée sur un bord seulement, l’aile est susceptible de voiler et d’entraîner la rupture de la pièce, comme on l’a vu à la section 5.5.5. La contrainte limite, dans ce cas, est égale à la contrainte de voilement (Fcf) de l’aile, obtenue de la façon suivante :

* on évalue m à l’aide de l’équation (5.27[[41]](#footnote-41));
* on calcule ensuite λ à l’aide de l’équation (5.24[[42]](#footnote-42));
* avec cet élancement, on calcule l’élancement normalisé () à l’aide de l’équation (5.8);
* la contrainte normalisée () est ensuite évaluée en utilisant l’équation (5.10[[43]](#footnote-43)), ou en utilisant l’une ou l’autre des courbes 3 et 4 sur le graphique de la figure 5.23[[44]](#footnote-44);
* Fc = Fcf est enfin obtenu à l’aide de l’équation (5.13[[45]](#footnote-45)).

Ainsi,

(5.34)

**Résistance post-voilement**

À la sous-section 5.5.2, on a vu qu’une paroi retenue sur ses deux bords pouvait offrir un surplus de résistance au-delà du voilement local. Pour tenir compte de cet effet, on a dérivé l’équation (5.14[[46]](#footnote-46)), qui est représentée sur la figure 5.23 par l’une ou l’autre des courbes 5 et 6.

Lorsque la paroi en question est située sur la fibre extrême de la section par rapport à l’axe de flexion (figure 5.24b), il faut considérer la contrainte limite suivante dans le calcul de la résistance de la pièce :

(5.35)

Les principales étapes pour le calcul de Fm sont les suivantes :

* calcul de m à l’aide de l’une des équations dérivées à la sous-section 5.5.4 (équations 5.19 à 5.22);
* calcul de λ à l’aide de l’équation (5.6);
* calcul de à l’aide de l’équation (5.8);
* calcul de à l’aide de l’équation (5.10) ou en utilisant l’une ou l’autre des courbes 3 et 4 sur le graphique de la figure 5.23;
* calcul de Fm à l’aide de l’équation (5.14).

Comme alternative, la résistance effective Fm peut être obtenue directement de l’une ou l’autre des courbes 5 et 6 sur le graphique de la figure 5.23, avec la valeur calculée de l’élancement normalisé ().

**Pièce composée triangulée**

Pour le calcul des pièces composées triangulées, il faut considérer comme contrainte limite, la contrainte de flambement (Fcc) de l’une des pièces principales de la membrure entre deux connecteurs (longueur a, sur la figure 5.35) :

(5.36)

La stabilité globale de la pièce composée triangulée est conditionnée par la résistance ou la stabilité plus locale de chacune des pièces qui la composent. Ici, on considère que c’est la contrainte de flambement (Fcc) de la portion la plus critique de l’une des pièces principales (ailes) de la membrure composée triangulée qui représente la contrainte limite (Fo).

## Diapositive 101 :

**Pièce composée triangulée**

Pour le calcul des pièces composées triangulées, il faut considérer comme contrainte limite, la contrainte de flambement (Fcc) de l’une des pièces principales de la membrure entre deux connecteurs (longueur a, sur la figure 5.35 – voir acétate) :

(5.36)

La stabilité globale de la pièce composée triangulée est conditionnée par la résistance ou la stabilité plus locale de chacune des pièces qui la composent. Ici, on considère que c’est la contrainte de flambement (Fcc) de la portion la plus critique de l’une des pièces principales (ailes) de la membrure composée triangulée qui représente la contrainte limite (Fo).

## Diapositive 102 :

**Soudures transversales aux extrémités**

Il a été démontré, à la sous-section 5.4.5, que les soudures transversales affectent de façon significative la résistance au flambement des pièces comprimées. Par contre, lorsqu’une pièce comporte des soudures transversales à ses extrémités, les zones affectées thermiquement sont bien confinées et ne sont pas susceptibles de voiler localement. Des essais ont démontré qu’elles peuvent même atteindre la contrainte Fu en compression. La contrainte moyenne dans les soudures est toutefois limitée à la plus critique des valeurs de Fwy ou Fy pour l’alliage considéré (voir les tableaux 2.8 et 2.9) et la contrainte limite (Fo) pour le calcul de la résistance au flambement de la pièce est considérée égale à Fy sur toute la longueur de la section, selon la référence (5.1).

(5.37)

Il convient de souligner, à ce point-ci, que lorsqu’un joint soudé à l’aide d’une soudure à rainure n’est pas affecté par le flambement de la pièce, la résistance pondérée en compression du joint soudé est la même que celle en traction. Cette condition se retrouve dans les joints situés aux extrémités des pièces. Ainsi, les équation (4.26[[47]](#footnote-47)) et (4.30[[48]](#footnote-48)) s’appliquent et il suffit de remplacer Tr par Cr dans ces équations.

**Soudures transversales le long de la pièce**

Lorsque des soudures transversales sont effectuées le long d’une pièce, elles ont pour effet de rendre celle-ci beaucoup moins résistante en compression. La contrainte limite considérée est alors égale à Fwy sur toute la longueur de la pièce.

(5.38)

**Soudures longitudinales**

Lorsqu’une section comporte des soudures longitudinales, la contrainte limite est la limite élastique pondérée donnée par l’équation (5.3).

(5.39)

## Diapositive 103:

**5.6 Flambement des pièces**

**5.6.2 Élancement normalisé et contrainte de flambement**

Pour être en mesure d’utiliser la courbe normalisée de la figure 5.22 (voir acétate 103) pour les pièces comprimées, il faut définir l’élancement normalisé () que l’on trouve en abscisse, comme on l’a fait pour les parois. Par définition, l’élancement normalisé est donné par l’équation suivante, dans laquelle Fo est la contrainte limite définie dans la sous-section précédente et est la contrainte d’Euler obtenue en divisant CE de l’équation (5.2) par l’aire de la section :

(5.40)

(5.41)

On verra, dans les sections qui suivent, que chaque pièce comprimée (profilé extrudé, laminé ou formé à froid, pièces à section composée, etc.) possède un élancement critique qui la caractérise. L’élancement est fonction de la géométrie de la section (r), des conditions de retenue (KL), ainsi que du mode de sollicitation (compression, flexion, cisaillement). Une pièce donnée peut flamber selon plusieurs modes (flexion, torsion, flexion-torsion) et c’est le plus critique de ces modes qui contrôle le dimensionnement de la pièce.

L’étude des pièces comprimées consiste essentiellement à définir l’élancement d’une pièce donnée, en tenant compte de tous les paramètres que nous venons d’énumérer, à calculer à l’aide de l’équation (5.41) et à obtenir de l’équation (5.10), ou directement de la figure 5.22, la contrainte normalisée (). Cette dernière, selon l’équation (5.10) nous permet de calculer la contrainte critique de flambement de la pièce (Fc) :

(5.42)

Il ne reste plus qu’à définir l’équation pour le calcul de la résistance des pièces comprimées.

## Diapositive 104 :

* On peut utiliser cette figure (qui montre graphiquement l’équation précédente et qu’on retrouve dans le Commentaire sur la norme CSA S157) pour déterminer la contrainte de flambage normalisée connaissant l’élancement normalisé
* On peut aussi programmer cette formule dans un progiciel de calcul (Microsoft Excel par exemple).

## Diapositive 105 :

**5.5 Voilement des parois minces**

**5.5.1 Élancement normalisé**

On étudie le voilement en considérant le comportement d’une paroi d’épaisseur t et de largeur b, soumise à une contrainte de compression uniforme, tel que montré sur la figure 5.10. La contrainte de compression critique Fc est obtenue en résolvant l’équation différentielle de la déformée de la paroi pour diverses conditions de retenue des bords non sollicités. La solution du problème est classique et on trouvera plus de détails dans les références (5.17) et (5.18).

La contrainte de voilement (ou flambement) élastique est donnée par l’équation suivante, où b/t est le rapport d’élancement, ν est le coefficient de Poisson (0,33) et E est le module d’élasticité (70 000 MPa).

(5.5)

Dans cette équation, le paramètre k tient compte des conditions de retenue le long des bords (figure 5.20). L’équation (5.5) est semblable à toutes les équations de stabilité élastique, c’est-à-dire que la contrainte élastique est inversement proportionnelle au carré de l’élancement.

Quand l’élancement tend vers zéro, la contrainte élastique devient infinie, ce qui physiquement est inadmissible. Il y a donc une limite supérieure à Fcr. Cette limite est égale à Fy, la limite élastique du matériau. Si on met l’équation (5.5) en graphique, en fonction de l’élancement b/t, on obtient la courbe montrée sur la figure 5.21. Lorsque le matériau se plastifie, au lieu d’utiliser E dans l’équation (5.5), on utilise le module tangent (Et), comme on l’a fait précédemment pour les pièces comprimées, afin d’obtenir le tronçon intermédiaire de la courbe de résistance. On constate ainsi que la courbe obtenue est tout à fait semblable à celles obtenues précédemment pour les pièces en compression.

## Diapositive 106 :

**5.6.3 Résistance pondérée en compression**

La résistance pondérée des pièces sollicitées en compression (Cr) est donnée par l’équation suivante, dans laquelle Φc est le coefficient de tenue pour la compression, égal à 0,9, et A est l’aire brute de la section :

(5.43)

## Diapositive 107 :

**5.6.4 Flambement en flexion**

Le mode de flambement en flexion est le mode de rupture le plus courant et, peut-être, le plus facile à déterminer pour les pièces comprimées. Il s’agit de calculer l’élancement de la pièce pour chacun des axes de flexion, à l’aide de l’équation suivante qui est maintenant familière :

(5.44)

Chaque axe de flexion possède un rayon de giration qui lui est propre (rx, ry, ry’), tel qu’illustré sur la figure 5.30 (voir acétate). L’élancement le plus critique est généralement celui qui correspond au rayon de giration le plus faible. Toutefois les conditions de retenue le long de la pièce peuvent faire en sorte qu’il ne soit pas évident, de prime abord, de déterminer lequel des axes est le plus critique. L’exemple présenté dur la figure 5.30d illustre une situation souvent rencontrée dans la pratique. Il faut, dans ce cas, comparer les élancements (KL)x/rx et (KL)y/ry pour identifier l’axe critique.

**Figure 5.30 – Flambement en flexion**

## Diapositive 108 :

**5.6.5 Flambement en torsion**

Les sections asymétriques (figure 5.30c) et, dans une certaine mesure, les sections monosymétriques (figure 5.30b) sont susceptibles de flamber dans le mode de torsion sous une charge de compression. Les équations qui gouvernent le calcul des élancements en torsion des sections les plus courantes sont présentées dans la présente sous-section. Les cornières y reçoivent une attention particulière puisqu’elles sont souvent utilisées dans les charpentes à treillis légers en aluminium.

Les cas plus complexes de flambement en torsion et en flexion-torsion sont examinés dans les prochaines sous-sections. C’est à la section 5.11 que sont fournis les renseignements nécessaires pour assister le concepteur dans le calcul des propriétés géométriques des sections pour la torsion (J, Cw, Ip, ro, etc.).

**Torsion pure**

Certaines pièces, en raison de leur géométrie, risquent de flamber dans un mode de torsion plutôt que dans le mode de flexion. C’est le cas, entre autres, des cornières, des profilés en croix et des profilés en T. L’élancement en torsion (λt) de ces pièces est évalué à l’aide de l’équation générale suivante, dans laquelle Ip est le moment d’inertie polaire calculé par rapport au centre de torsion de la section (Ip = Ix + Iy + A(+)), J est la constante de torsion de Saint-Venant et xo et yo dans l’équation pour le calcul de Ip sont les distances séparant le centre de torsion de l’axe neutre (voir la figure 5.30 et la section 5.11):

(5.45)

## Diapositive 109 et 110 :

**5.6.5 Flambement en torsion**

Les sections asymétriques (figure 5.30c) et, dans une certaine mesure, les sections monosymétriques (figure 5.30b) sont susceptibles de flamber dans le mode de torsion sous une charge de compression. L.es équations qui gouvernent le calcul des élancements en torsion des sections les plus courantes sont présentées dans la présente sous-section. Les cornières y reçoivent une attention particulière puisqu’elles sont souvent utilisées dans les charpentes à treillis légers en aluminium.

Les cas plus complexes de flambement en torsion et en flexion-torsion sont examinés dans les prochaines sous-sections. C’est à la section 5.11 que sont fournis les renseignements nécessaires pour assister le concepteur dans le calcul des propriétés géométriques des sections pour la torsion (J, Cw, Ip, ro, etc.).

**Torsion pure**

Certaines pièces, en raison de leur géométrie, risquent de flamber dans un mode de torsion plutôt que dans le mode de flexion. C’est le cas, entre autres, des cornières, des profilés en croix et des profilés en T. L’élancement en torsion (λt) de ces pièces est évalué à l’aide de l’équation générale suivante, dans laquelle Ip est le moment d’inertie polaire calculé par rapport au centre de torsion de la section (Ip = Ix + Iy + A(+)), J est la constante de torsion de Saint-Venant et xo et yo dans l’équation pour le calcul de Ip sont les distances séparant le centre de torsion de l’axe neutre (voir la figure 5.30 et la section 5.11):

(5.45)

Cet élancement peut être normalisé et utilisé pour calculer F dans l’équation (5.10). La courbe normalisée (développée pour les sections autres que les cornières) est utilisée de façon sécuritaire avec les valeurs d’élancement présentées dans cette sous-section. La résistance ultime (Cr) est ensuite évaluée avec et Fo = Fy pour la torsion, selon la référence (5.1).

Pour des sections simples, telles les cornières, l’équation (5.45) se réduit à la formule suivante puisque, dans ce cas, Ip = 2w3 t/3 et J = 2wt3/3 :

(5.46)

Pour le calcul de la largeur w de l’aile la plus longue, il faut exclure le filet de métal sur le talon des cornières extrudées, tel qu’illustré sur la figure 5.31a (voir acétate 108). Le congé du talon a pour effet d’augmenter la valeur de J dans l’équation (5.45) et on compense en considérant une largeur réduite. Pour les cornières fabriquées à partir de feuilles ou de tôles d’aluminium, la largeur w est mesurée par rapport à la ligne médiane de l’aile la plus courte (figure 5.31b – voir acétate 108). La courbure du talon des cornières fabriquées à froid n’affecte pas de façon significative le comportement de la cornière au flambement.

L’élancement des cornières formées, à bords raidis, d’épaisseur constante et à ailes égales, peut être évalué à l’aide de l’équation qui suit, où β = c/w (figure 5.31c – voir acétate 108):

(5.47)

L’addition de simples retours (raidisseurs) aux extrémités libres des cornières a pour effet d’augmenter légèrement l’élancement de torsion des cornières, comme le démontre l’équation (5.47).

**Figure 5.31 – Considérations géométriques pour les cornières**

Les cornières à bourrelets extrudées, du type de celle présentée sur la figure 5.31d, offrent un comportement optimal sous les charges de compression puisque les bourrelets et le congé du talon (bourrelet dans ce cas-ci) participent efficacement à réduire l’élancement en torsion (Ar). L’équation qui gouverne, dans ce cas-ci, est l’équation générale (5.45). On verra, dans la sous-section 5.11.4, comment tenir compte des bourrelets et des congés dans les calculs.

## Diapositive 111 et 112 :

Lorsqu’une cornière est reliée à une autre pièce par une seule aile à ses extrémités, l’assemblage excentrique induit un couple de flexion uniforme dans la pièce sous l’effet de la charge de compression. Le phénomène équivaut à celui que nous avons étudié dans le chapitre précédent pour les charges de traction. La cornière peut ainsi flamber dans un mode où la flexion et la torsion sont combinées.

Il est possible de tenir compte de cet effet à l’aide de l’élancement suivant où λt est donné par l’équation (5.46), et λy’ est égal à KL/r, en considérant le rayon de giration minimal de la pièce (ry’ sur la figure 5.30c – voir acétate 106) et les coefficients de longueur effective (K) appropriés (figure 5.19[[49]](#footnote-49)) :

(5.48)

La résistance en compression (Cr), obtenue de l’équation (5.43) avec cette valeur de λ, ne doit pas être supérieure à , lorsque la cornière est assemblée à l’aide de deux boulons ou à l’aide de cordons de soudure. On tient ainsi compte des effets combinés de la torsion et de la flexion causée par l’assemblage excentrique de façon sécuritaire, tel que démontré par des essais en laboratoire.

## Diapositive 113 :

**Torsion et gauchissement**

Les cornières et les profilés en T offrent peu ou pas de rigidité au gauchissement et leur constante de gauchissement Cw est généralement faible. Lorsque Cw est appréciable, comme c’est le cas pour les profilés en C, les profilés en Z et les profilés à chapeau (figure 5.30b et c – voir acétate), il est possible de tenir compte de ce surplus de résistance à l’aide de l’équation suivante :

(5.49)

En examinant l’équation (5.49), on remarque que l’influence du gauchissement diminue rapidement lorsque la longueur (L) de la pièce augmente et qu’à la limite, l’équation (5.49) se réduit à la valeur donnée par l’équation (5.45).

Un exemple de calcul est présenté à la sous-section 5.12.5 (exemple 5.5[[50]](#footnote-50)).

## Diapositive 114, 115 et 116 :

**5.6.6 Flambement en flexion-torsion**

Les sections ouvertes à symétrie simple, telles celles qui sont présentées sur la figure 5.30b, peuvent flamber dans un mode où la flexion par rapport à l’axe de symétrie (axe x – x sur la figure) se combine à la torsion. On appelle ce mode de flambement, le flambement en flexion-torsion.

On en tient compte de façon approximative à l’aide de l’équation qui suit, où xo est la distance entre l’axe neutre et le centre de torsion (figure 5.30b – voir diapositive 113), est le rayon de giration polaire calculé par rapport au centre de torsion, et λ1 est la plus grande des valeurs de A données par (axe de symétrie) et l’élancement de torsion λt calculé à l’aide de l’équation (5.45) ou (5.49). L’élancement λ2 est la plus petite valeur des élancements λx et λt.

(5.50)

Il est aussi possible d’utiliser les courbes de la figure 5.32 (voir acétate 132) pour évaluer le degré d’interaction entre la flexion et la torsion dans le calcul de la résistance au flambement de l’une ou l’autre des sections de la figure 5.30b. La figure est assez explicite quant à son mode d’utilisation. La valeur de k tirée du graphique sert à multiplier la plus grande des valeurs entre λx et λt, soit λ1, pour évaluer λ.

**Figure 5.32 – Interaction entre la torsion et la flexion pour le calcul de la résistance au flambement de sections mono-symétriques**

## Diapositive 117, 118 et 119 :

**5.6.7 Formulation générale**

Une formulation générale, tenant compte des différents modes de flambement de la plupart des profilés d’usage courant est présentée dans la référence (5.4).

Elle consiste à calculer une contrainte de flambement (Fe) équivalente à la contrainte de flambement d’Euler (équation 3.35[[51]](#footnote-51)) et à l’insérer dans l’équation suivante pour le calculer de l’élancement normalisé () de la pièce :

(5.51)

Cette équation est, en fait, la même que l’équation (5.40[[52]](#footnote-52)).

* Pour les sections doublement symétriques (les sections en forme de croix, par exemple), de même que les sections axisymétrique (les sections en Z, par exemple), Fe est égal à la plus petite des valeurs suivantes :

(5.52)

(5.53)

(5.54)

où

(5.55)

Dans ces équations, Kz est le coefficient de longueur effective pour la torsion (Kz = 1,0, de façon sécuritaire), Lx, Ly et Lz sont les longueurs libres de la pièce mesurées selon les axes x, y et z (axe longitudinal passant par le centre de torsion), respectivement, et xo et yo sont les coordonnées du centre de torsion de la section mesurées par rapport au centre de gravité. Les autres paramètres ont été définis précédemment.

* Pour les sections monosymétriques, avec l’axe x-x comme axe de symétrie (figure 5.30b), Fe est la plus petite des contraintes Fey (équation 5.53) et Fexz, celle-ci étant donnée par l’équation suivante :

(5.56)

où

(5.57)

* Pour les sections asymétriques (figure 5.30c), Fe est la plus petite racine de l’équation cubique suivante :

(5.58)

Un exemple de l’utilisation de ces équations est donné dans la référence (5.8).

Il n’est pas toujours facile de déterminer, a priori, lequel ou lesquels de ces différents modes de flambement sont susceptibles de contrôler le calcul d’une pièce. Le tableau 5.2 (voir acétate 118) a été développé dans le but d’assister le concepteur dans son choix.

**Tableau 5.2 – Modes potentiels de flambement global des sections**

Les sections monosymétriques (figure 5.30b – voir acétate 117) n’ont pas tendance à flamber en torsion lorsque la charge de compression passe par le centre de torsion. C’est ce qui se produit, par exemple, lorsque la charge de compression est appliquée à l’aide d’un profilé en T (figure 4.21[[53]](#footnote-53) en remplaçant T par C).

Des exemples de calcul de pièces comprimées sont présentés aux sous-sections 5.12.3 (exemple 5.3[[54]](#footnote-54)) et 5.12.4 (exemple 5.4[[55]](#footnote-55)).

# Calcul des pièces à section composée

## Diapositive 123 et 125 :

**5.7 Calcul des pièces à section composée**

**5.7.1 Introduction**

Les pièces à section composée sont des membrures constituées de deux ou de plusieurs profilés, reliés entre eux à l’aide de pièces de plus petites dimensions, de boulons ou de soudures, pour leur permettre de résister de façon beaucoup plus efficace aux charges qui leur sont imposées que si elles devaient travailler individuellement. Elles sont classées selon le mode de liaison utilisé pour relier les pièces principales. On distingue les pièces groupées, les pièces avec traverses de liaison et les pièces triangulées. Quelques pièces à section composée sont illustrées sur les figures 5.33 (voir acétate 122), 5.34 (voir acétate 123) et 5.35 (voir acétate 124).

On utilise des pièces à section composée lorsque les efforts de compression sont trop grands pour qu’une section standard puisse être utilisée, dans les cas où il est utile de faire travailler conjointement un ou deux profilés, ou encore pour le renforcement des pièces.

Si les pièces à section composée sont moins couramment utilisées qu’auparavant dans les charpentes d’acier, ce n’est pas le cas pour les charpentes d’aluminium. En effet, le peu de disponibilité de profilés structuraux standard de grande capacité en aluminium et les propriétés physiques et mécaniques intrinsèques de ce métal par rapport à celles de l'acier, font en sorte que le concepteur de charpentes en aluminium doit souvent avoir recours à des membrures à section composée pour qu’une structure résiste aux charges.

**Figure 5.33 – Pièces regroupées**

**Figure 5.34 – Pièces avec traverses de liaison**

**Figure 5.35 – Pièces triangulées**

## Diapositive 126 et 127 :

**5.7.2 Résistance des pièces groupées et des pièces avec traverses de liaison**

Puisque la configuration des pièces à section composée en aluminium diffère peu de celle des pièces en acier, la même méthode de calcul peut être utilisée, avec quelques variantes qui tiennent compte de la différence des matériaux. **La principale règle s’énonce comme suit : l’élancement d’une composante principale doit être plus petit ou égal à l’élancement de toute la pièce**. Pour réduire les chances que la flexibilité des connecteurs ne contrôle le comportement de la pièce, on limite l’élancement des pièces principales entre deux connecteurs à 0,75 fois l’élancement global de la pièce à section composée. Ainsi,

(5.59)

**(Puisqu'on veut que la ruine de la pièce survient par plastification ou flambement global avant que ne survienne le voilement d’une des parois de la pièce)**

Dans cette équation, a est la distance mesurée sur une pièce principale entre les points d'attache, tel qu’illustré sur les figures 5.33 à 5.35, rmin est le rayon de giration minimal d’une pièce principale (ry’ pour une cornière), K est le coefficient de longueur effective obtenu de la figure 5.19[[56]](#footnote-56) ou considéré égal à 1,0, de façon sécuritaire, L est la longueur de la pièce à section composée, et r est le rayon de giration minimal de la pièce à section composée.

L’équation (5.59) peut servir à faire un premier estimé de l’écartement (a) des connecteurs dans les pièces à section composée. Il convient de noter que les pièces groupées (figure 5.33) et les pièces avec traverses de liaison (figure 5.34) doivent comporter au moins quatre liaisons entre les pièces : une à chaque extrémité et une à chaque tiers-point. Un point d’attache central seul ne permet pas de développer une action composée entre les pièces.

Si le mode de flambement est tel qu’un effort de cisaillement sollicite les connecteurs entre les pièces (flexion par rapport à l’axe y-y des pièces à section composée illustrées sur les figures 5.33 et 5.34), l’élancement selon l’équation suivante.

**Figure 5.33 – Pièces regroupées**

**Figure 5.34 – Pièces avec traverses de liaison**

**Figure 5.35 – Pièces triangulées**

## Diapositive 128 :

Si le mode de flambement est tel qu’un effort de cisaillement sollicite les connecteurs entre les pièces (flexion par rapport à l’axe y-y des pièces à section composée illustrées sur les figures 5.33 et 5.34), l’élancement correspondant de la pièce à section composée s’en trouve affecté et augmente selon l’équation suivante.

(5.60)

Dans cette équation, l’élancement λo est égal à KL/r, comme dans l’équation (5.59), à la différence que le rayon de giration (r), dans ce cas-ci, correspond à l’axe principal y-y. On remarque que le flambement flexionnel qui sollicite les connecteurs (transverses de liaison, boulons, rivets ou soudures) se produit dans la direction normale à l’axe principal (y-y) qui ne croise pas les pièces principales, tel qu’illustré sur les figures 5.33 et 5.34.

L’élancement λa, dans l’équation (5.60), est égal à a/r, a étant défini plus haut, et r étant le rayon de giration de l’élément principal mesuré par rapport au même axe de flexion que celui de la pièce globale (l’axe y’ – y’ sur la figure 5.33).

La résistance pondérer en compression (Cr) de la pièce à section composée est obtenue de l’équation (5.43) en considérant Fo = Fy et la valeur de λ obtenue de l’équation (5.60). On utilise l’équation (5.41) pour évaluer et l’équation (5.10) pour le calcul de , qui apparaît dans l’équation (5.43). Cette dernière valeur peut aussi être tirée du graphique de la figure 5.22.

Les connecteurs doivent être dimensionnés pour résister à un effort de cisaillement total égal à Cr/40 à chaque point d’attache.

Un exemple de calcul est présenté à la sous-section 5.12.6 (exemple 5.6[[57]](#footnote-57)).

**Figure 5.33 – Pièces regroupées**

**Figure 5.34 – Pièces avec traverses de liaison**

**Figure 5.35 – Pièces triangulées**

## Diapositive 130 :

**5.7.3 Résistance des pièces à doubles cornières**

Les pièces constituées de cornières doubles travaillant de façon composée sont très utilisées dans les charpentes d’aluminium, de même que dans les charpentes d’acier (voir les figures 5.33 et 5.34). Lorsqu’elles sont sollicitées en compression, ces pièces ont tendance à flamber dans un mode de flexion-torsion équivalent à celui qui a été étudié à la sous-section 5.6.6. L’équation qui gouverne le calcul de ces pièces est la suivante :

(5.61)

On note la similitude entre cette équation et l’équation (5.50). Le rapport xo/ro est considéré comme égal à 0,5, de façon approximative dans l’équation (5.61). L’élancement λ1 est la plus grande des valeurs de λf et de λt, où λf est l’élancement donné par l’équation (5.60), qui tient compte de la flexibilité des pièces assemblées, et λt est l’élancement en torsion d’une cornière, donné par l’équation (5.46) (λt = 5w/t). Il convient de rappeler que λt est évalué en considérant les dimensions w et t de l’aile la plus longue de la cornière. Enfin, l’élancement λ2 de l’équation (5.61) est la plus petite des valeurs de λf et de λt.

L’élancement obtenu de l’équation (5.61) permet, de façon similaire au cas précédent, de calculer la résistance pondérée en compression (Cr) des pièces constituées de cornières doubles.

## Diapositive 131 :

**5.7.4 Résistance des pièces triangulées**

En compression, les pièces triangulées, telles celles qui sont illustrées sur la figure 5.35, se comportent de façon monolithique. **Il a été démontré que la flexibilité des connecteurs sollicités en cisaillement, lors du flambement de la pièce en flexion, est négligeable.**

L’élancement se calcule simplement à l’aide de l’équation suivante, où le rayon de giration (r) est celui qui correspond à l’axe principal le plus critique de la section :

(5.62)

Comme il a été mentionné à la sous-section 5.6.1, la contrainte limite (Fo) à considérer pour le calcul de la résistance pondérée (Cr) des pièces triangulées est la contrainte de flambement (Fcc) de l’une des pièces principales de la membrure entre deux connecteurs (longueur a, sur la figure 5.35). L’élancement de ce segment de pièce est donné par l’équation suivante, où a est la distance entre les centres géométriques de connecteurs adjacents, et rmin est le rayon de giration correspondant à l’axe le plus critique de la section pour le flambement.

(5.63)

**Les membrures triangulées rectangulaires constituées de cornières sont plus efficaces lorsque les connecteurs en forme de K sont décalés sur les faces adjacentes**. L’élancement en flexion (λa = K a/r) à considérer pour une telle disposition géométrique est le plus critique obtenu pour les axes x, y et y’, selon le cas I de la figure 5.19.

S’il s’agit d’une cornière simple, l’élancement en torsion (λt), donné par l’équation (5.46), pourrait être plus critique.

Si la matière présentée dans cette section ne permet pas le dimensionnement complet de tous les types de pièces à section composée en aluminium, le lecteur devra se référer à des ouvrages plus spécialisés, disponibles dans la littérature scientifique, pour y trouver les compléments d’information.

Il en sera ainsi pour les applications introduites dans les prochaines sections. Compte tenu de la complexité et de l’étendue des sujets qui y sont traités, il n’a pas été jugé réaliste de trop excéder le contenu de la référence (5.1), qui sert de référence principale au présent ouvrage.

# Flambement des panneaux plats raidis

## Diapositive 135 et 136 :

**5.8 Flambement des panneaux plats raidis**

**5.8.1 Définitions**

À la section 5.5, on a vu comment calculer la résistance des parois raidies. Il s’agissait alors de parois simples représentant un élément de profilés généralement extrudés ou formés à froid (figure 5.36 – voir acétate 134). Les raidisseurs étaient soit des parois adjacentes à la paroi considérée, soit un segment de paroi plié mécaniquement, soit un bourrelet (figure 5.29[[58]](#footnote-58)). On a aussi vu comment calculer la résistance d’une paroi supportée sur les deux bords et raidie en son centre (figure 5.26c et équation 5.23).

Plusieurs applications requièrent l’utilisation de parois plus larges qu’il faut alors raidir davantage, longitudinalement ou transversalement (ou les deux à la fois), pour leur donner plus de rigidité et leur permettre de résister efficacement à la compression, à la flexion et au cisaillement. Il s’agit alors de parois avec raidisseurs multiples ou, si l’on préfère, de panneaux plats raidis. Quelques exemples de sections sont présentés sur la figure 5.36 et deux exemples d’application sont illustrés sur la figure 5.37 (voir acétate 135).

**Figure 5.36 – Sections de panneaux plats raidis**

**Figure 5.37 – Exemples d’application de panneaux raidis**

**Dans la présente section, on se limitera à l’étude de la résistance en compression de ces panneaux**. La résistance en flexion et en cisaillement sera traitée dans le chapitre VI. La résistance en compression et à la pression diamétrale de panneaux de même type, mais courbés, fera l’objet d’une brève présentation dans la prochaine section.

## Diapositive 137 :

**5.8.2 Voilement des parois et des feuilles raidies**

Idéalement, sous une charge de compression, les raidisseurs demeurent droits et les parois voilent entre ces derniers. Les raidisseurs doivent alors posséder une rigidité suffisante pour provoquer cet effet. Les deux conditions que l’on peut rencontrer dans pareille situation sont illustrées sur la figure 5.38a (voir acétate 136).

Les raidisseurs transversaux ont peu ou pas d’effet sur la résistance en compression d’un panneau lorsque l’écartement (a), représenté sur la figure 5.38a i), est supérieur ou égal à la largeur *b* du panneau. Le panneau se comporte de façon beaucoup plus efficace lorsque les raidisseurs sont disposés dans l’axe du chargement (figure 5.38a ii).

Dans la plupart des cas, on considère la paroi de dimensions *a x b* simplement supportée sur son contour. Toutefois, lorsqu’un raidisseur creux semblable au profilé à chapeau illustré sur la figure 5.30b est utilisé, la retenue sur les bords s’apparence davantage à celle d’un appui fixe.

Ainsi, pour un panneau de dimensions *a x b*, l’élancement critique est donné par les équations qui suivent, où t est l’épaisseur de la paroi.

**Figure 5.38 – Modes de sollicitation pour les calculs de résistance**

## Diapositive 138 :

Les raidisseurs transversaux ont peu ou pas d’effet sur la résistance en compression d’un panneau lorsque l’écartement (a), représenté sur la figure 5.38a i), est supérieur ou égal à la largeur b du panneau. Le panneau se comporte de façon beaucoup plus efficace lorsque les raidisseurs sont disposés dans l’axe du chargement (figure 5.38a ii).

Ainsi, pour un panneau de dimensions a x b, l’élancement critique est donné par les équations qui suivent, où t est l’épaisseur de la paroi.

Pour des appuis simples sur le contour,

lorsque (5.64)

lorsque (5.65)

Pour des appuis rigides sur le contour,

lorsque (5.66)

lorsque (5.67)

## Diapositive 139 :

Les équations (5.64) à (5.67) ne sont valides que lorsque les raidisseurs sont suffisamment rigides pour forcer le voilement de la paroi, sans fléchir. Le moment d’inertie des raidisseurs doit alors satisfaire les équations qui suivent.

Pour les raidisseurs perpendiculaires à l’axe de chargement (figure 5.38ai),

(5.68)

Lorsque des raidisseurs longitudinaux sont aussi présents, Is augmente dans la proportion du rapport entre la charge à laquelle résiste un panneau raidi longitudinalement et la charge à laquelle résiste un panneau raidi transversalement.

Pour des raidisseurs parallèles à l’axe de chargement (figure 5.38aii).

(5.69)

Dans cette équation, λ est l’élancement obtenu de l’une des équations (5.64) à (5.67), et A’ est donné par l’équation suivante :

(5.70)

Il convient de souligner que la théorie présentée dans cette sous-section ne s’applique généralement pas aux profilés formés à froid illustrés sur la figure 5.36b (voir acétate 139). Il faut alors considérer ces derniers globalement, tant pour leur résistance en compression que pour leur résistance en cisaillement.

## Diapositive 140 et 141 :

**5.8.3 Flambement global du panneau**

Lorsque des panneaux raidis, du type de ceux qui sont présentés sur la figure 5.36a, sont sollicités en compression perpendiculairement au sens des raidisseurs (figure 5.38b i), l’élancement à utiliser pour le calcul de la résistance pondérée en compression du panneau (Cr) est donné par l’équation suivante, où I est le moment d’inertie du panneau raidi par unité de largeur (mm3) :

Les panneaux raidis se comportent plus efficacement lorsqu’ils sont sollicités en compression dans le sens des raidisseurs (figure 5.38b ii). Cela se perçoit intuitivement. Dans pareil cas, le panneau ondule lors du flambement. Lorsque le panneau est relativement long, la longueur de l’ondulation est fixe et la résistance critique est constante, quelle que soit la longueur (L) du panneau. L’élancement correspondant est alors obtenu des équations (5.73) ou (5.75), selon le type de panneau. Lorsque la longueur du panneau est inférieure à la longueur d’une demi-ondulation, l’élancement est réduit à la valeur donnée par l’équation (5.72) ou (5.74). Il en résulte donc que l’élancement à considérer pour le calcul de la résistance au flambement d’un panneau raidi longitudinalement est la valeur la moins élevée de λ obtenue des équations (5.72) et (5.73) ou (5.74) et (5.75).

Pour les parois et les feuilles raidies de longueur L (figure 5.36a),

(5.72)

(5.73)

## Diapositive 142 :

Pour les feuilles formées à froid de longueur L (figure 5.36b),

(5.74)

(5.75)

Tous les paramètres ont été définis précédemment, à l’exception de η qui est le rapport de la largeur originale de la feuille (dépliée) sur la largeur de la feuille formée à froid.

On constate que le premier mode de flambement, dans chacun de cas, est le mode de flambement global en flexion de la pièce.

Si les feuilles ou les parois voilent entre les raidisseurs, selon la théorie présentée à la sous-section 5.5.4 (équation 5.21), la contrainte limite à utiliser pour le calcul de Cr doit être celle qui est donnée par l’équation (5.35).

Voir l’exemple de calcul 5.7 à la sous-section 5.12.7[[59]](#footnote-59).

# Flambement des parois courbes et des tubes

## Diapositive 146 et 147 :

**5.9 Flambement des parois courbes et des tubes**

**5.9.1 Définitions**

L’étude des parois courbes et des tubes est très spécialisée et fait l’objet de normes spécifiques (voir le tableau 3.13[[60]](#footnote-60)). La brève étude qui suit n’a pour but que de présenter des valeurs d’élancement de pièces correspondant à des cas simples. Les cas étudiés sont présentés sur les figures 5.39 (voir acétate 145) et 5.40 (voir acétate 146) (voir aussi la figure 5.26g[[61]](#footnote-61)).

Les tubes et les cylindres sont des formes structurales très efficaces pour résister à des pressions transversales (internes et externes) ou à des pressions longitudinales. Ils résistent aussi très bien à des efforts de flexion.

Les applications les plus fréquentes sont les lampadaires, les supports de panneaux de signalisation, les conduites, les réservoirs à pression ainsi que tous les autres types de réservoirs.

**Différentes structures autoroutières en aluminium**

**Figure 5.39 – Résistance à la compression axiale des parois courbes et des tubes**

**Figure 5.40 – Résistance à la compression radiale des parois courbes et des tubes**

## Diapositive 148 :

**5.9.2 Flambement des tubes sous sollicitations axiales**

En tenant compte de l’influence des imperfections initiales inhérentes à ce type d’élément, la résistance pondérée au flambement (Cr) d’un tube long sollicité en compression est obtenue en considérant Fo = Fy et l’élancement (λ) suivant :

(5.76)

Les paramètres R et t sont, respectivement, le rayon du tube et l’épaisseur de la paroi, tel qu’illustré sur la figure 5.39a.

Lorsque le tube est très court, c’est-à-dire lorsque , selon la figure 5.39a, le comportement du tube se rapproche de celui des panneaux plats et l’élancement s’en trouve modifié :

(5.77)

où

(5.78)

= l’élancement donné par l’équation (5.76).

## Diapositive 149 :

**5.9.3 Flambement des parois courbes sous sollicitations axiales**

La résistance pondérée au flambement de parois courbes (figure 5.39c) est obtenue de l’équation suivante, qui reflète la sensibilité croissante de la paroi aux imperfections lorsque le rapport R/t augmente. L’équation (5.79) est utilisée avec Fo = Fy dans le calcul de Cr.

(5.79)

où

= l’élancement donné par l’équation (5.64) lorsque , ou l’élancement donné par l’équation (5.65) lorsque .

= l’élancement donné par l’équation (5.76) pour un tube de même rayon (R) et de même épaisseur (t) que ceux de la paroi courbe.

Dans ces équations, a est la longueur du panneau courbe mesurée entre les raidisseurs transversaux (ou circonférentiels) et b est la largeur du panneau (la longueur de l’arc) mesurée entre les raidisseurs longitudinaux. Un panneau courbe est, en principe, toujours supporté ou raidi sur ses bords longitudinaux.

## Diapositive 150 :

(Voir acétate 149)

Lorsque le panneau courbe comporte plusieurs raidisseurs longitudinaux, tel que montré sur la figure 5.39d, l’élancement est obtenu à l’aide de l’équation (5.77) avec les valeurs suivantes pour le calcul de λ1 et λ2. L’équation s’applique aussi aux parois constituées de feuilles formées à froid, tel que noté sur la figure 5.39d.

(5.80)

(5.81)

Bien que tous les paramètres de ces équations aient été définis précédemment, il convient de rappeler que *a* est la longueur de la paroi, mesurée entre deux raidisseur transversaux, r est le rayon de giration de la paroi courbe et η est le rapport de la largeur originale de la paroi (dépliée) sur la largeur de la paroi formée à froid. Le rapport est égal à 1.0 pour les parois courbes du type de celles montrées sur la figure 5.36a.

L’équation (5.77), avec les valeurs de λ données par les équations (5.80) et (5.81), tient compte de l’action combinée de la paroi courbe et de la paroi raidie, qui agissent comme des poteaux de longueur a, en additionnant simplement les contraintes induites par chaque type de flambement.

Les raidisseurs longitudinaux et transversaux, considérés individuellement n’influencent pas *la résistance au flambement* des parois courbes et des tubes. En effet, les raidisseurs longitudinaux réduisent simplement les contraintes axiales en augmentant l’aire de la section. Si une plus grande rigidité axiale est requise, il est alors préférable d’augmenter l’épaisseur de la paroi. Les raidisseurs transversaux (ou anneaux circulaires) ont la double fonction d’empêcher la paroi de se déformer et de transmettre les charges appliquées à la paroi.

Le flambement de tubes cylindriques non raidis entraîne inévitablement la rupture de la pièce puisqu'il n’existe aucune résistance post-flambement pour ce type de paroi. L’addition de raidisseurs longitudinaux et transversaux a pour effet de donner au tube une réserve de résistance après le voilement de la paroi.

Voir l’exemple de calcul 5.7 à la sous-section 5.12.7.

## Diapositive 151 et 152 :

**5.9.4 Résistance à la compression radiale**

Un tube soumis à une pression radiale, tel qu’illustré sur la figure 5.40a, est moins stable que le même tube comprimé de façon axiale. Dans ce cas, ce sont les anneaux périphériques qui ont pour fonction de stabiliser la paroi en limitant les déformations.

La contrainte de flambement (Fc) du tube est obtenue de l’équation (5.12) avec Fo = Fy et la valeur de λ calculée à l’aide des équations suivantes :

Lorsque ,

(5.82)

Lorsque ,

(5.83)

Pour les parois courbes de bonne longueur, retenues latéralement sur les bords (voir la figure 5.40b (acétate 151)),

Lorsque ,

(5.84)

Lorsque ,

(5.85)

Tous les paramètres de ces équations sont définis sur la figure 5.40[[62]](#footnote-62).

# Flambement des panneaux sandwich

## Diapositive 156 :

**5.10 Flambement des panneaux sandwich**

**5.10.1 Définitions**

Il existe plusieurs types de panneaux sandwich utilisés à des fins spécifiques dans la construction. Le panneau dont il est question dans cette sous-section consiste en deux minces feuilles d’aluminium collées de part et d’autre d’un noyau constitué d’un matériau dont le module d’élasticité (Ec) est moins de cent fois inférieur au module d’élasticité (E) de l’aluminium. Le matériau du noyau peut donc être une mousse de polystyrène avec des propriétés isolantes reconnues ou un panneau de PVC. Il existe aussi des noyaux plus spécialisés faits de matériaux disposés en nid d’abeille ou de métal formé à froid, calculés et dimensionnés par les fabricants. Le panneau étudié dans la présente sous-section est représenté schématiquement sur la figure 5.41 (voir acétate).

Le panneau sandwich peut être sollicité en traction, en flexion, en compression ou en cisaillement. Le cas le plus général est celui d’un panneau qui combine deux ou plusieurs de ces types de sollicitations. C’est la peau qui résiste aux charges axiales, aux moments fléchissant et à l’effort tranchant dans le plan du panneau, et le noyau qui résiste à l’effort tranchant sur la profondeur du panneau en agissant comme une âme de poutre. Dans cette sous-section, on n’étudiera que la sollicitation en compression alors que le cisaillement sera examiné dans le chapitre suivant. Quant à la traction, on comprendra que seuls les deux feuillards d'aluminium sont en mesure d’offrir une certaine résistance et que la difficulté réside davantage dans l’assemblage du panneau au reste de la charpente.

**Figure 5.41 – Panneau sandwich**

## Diapositive 157 :

**5.10.2 Résistance du panneau au flambement**

Dans le calcul de la résistance au flambement (Cr) d’un panneau sandwich, on considère le panneau dans sa globalité. Les peaux d’épaisseur t ne sont pas considérées séparément. Ces dernières interagissent avec le noyau, ce qui implique certaines vérifications à effectuer pour assurer l’intégrité structurale du système. À l’ultime, la contrainte dans la fibre extrême est la contrainte de flambement de la peau en aluminium. Par conséquent, la contrainte limite (Fo) à considérer dans le calcul de la résistance au flambement du panneau sera la contrainte Fc de la peau, obtenue avec Fo = Fy et l’élancement (λ) dérivé dans la sous-section suivante.

Lorsque le panneau sollicité en compression n’est pas retenu sur les bords, il flambe comme un poteau, selon l’équation d’Euler. Ainsi,

(5.86)

Si le panneau est retenu sur les bords, il se comporte comme une paroi. Ainsi :

lorsque ,

(5.87)

et lorsque ,

(5.88)

Comme on le voit sur la figure 5.41, L est la longueur, d est l’épaisseur totale et b est la largeur du panneau.

Dans ces cas, toutefois, le faible module de cisaillement (Gc) du noyau va influencer négativement la résistance au flambement (Cr) calculée. La résistance ultime (Cu) est liée à la résistance au flambement en flexion (Cr) ainsi qu’à la résistance au flambement en cisaillement pur (Gc d b) selon l’équation suivante :

En réarrangeant les termes, on obtient

(5.89)

Cette équation indique qu’il faut diviser la résistance en compression (Cr) obtenue des équations (5.87) et (5.88) par le facteur () afin de tenir compte de la flexibilité en cisaillement du noyau.

## Diapositive 158 :

**5.10.3 Contrainte de flambement de la peau**

La peau d’un panneau sandwich se comporte comme une paroi sur fondation élastique, pour laquelle la contrainte critique est bien documentée :

Puisque ce mode de flambement est très sensible aux imperfections, le facteur 0,86 est réduit à 0,50. si on égalise cette contrainte à la contrainte d’Euler (), on obtient très facilement l’équation suivante :

(5.90)

Pour les noyaux en polystyrène ou en PVC, Gc est approximativement égal à 0,5Ec, ce qui donne :

(5.91)

Il convient de rappeler que Ec et Gc sont respectivement le module élastique et le module de cisaillement du noyau et que E est le module élastique de l’alliage d’aluminium constituant la peau du panneau sandwich.

On utilise cet élancement dans l’équation (5.8) pour calculer , qui, à son tour, est utilisé dans l’équation (5.10) pour obtenir . Considérant Fo = Fy dans l’équation (5.12), on obtient la contrainte de flambement (Fc) qui sert de contrainte limite (Fo), dans la sous-section précédente, pour le calcul de la résistance pondérée en compression du panneau sandwich.

## Diapositive 159 :

**5.10.4 Adhérence entre la peau et le noyau**

Le noyau, de même que la colle entre la peau et le noyau doivent posséder une résistance suffisante pour résister aux efforts de cisaillement et d’arrachement développés lors du voilement initial du panneau.

Une équation est fournie dans la référence (5.1) pour évaluer la résistance pondérée (τtr) du lien à développer entre la peau et le noyau afin d’empêcher la séparation des matériaux, ainsi que pour évaluer la résistance pondérée requise en traction du matériau servant de noyau. La contrainte définie par l’équation (5.92) agit dans une direction perpendiculaire à la surface du panneau.

(5.92)

La variable f est la contrainte de compression dans la peau, due aux charges pondérées appliquées et Fc est la contrainte de flambement () de la peau, calculée à la sous-section 5.10.3. Selon la référence (5.9), cette équation peut être réduite de façon importante pour le type de panneau sandwich considéré :

(5.93)

# Pièces en torsion

## Diapositive 163 et 164 :

**5.11 Pièces en torsion**

**5.11.1 Introduction**

Puisqu’aucun chapitre de ce volume n’est exclusivement consacré à la torsion et qu’il en a déjà été question dans le chapitre actuel, il a été jugé pertinent de présenter une courte section sur ce sujet pour y introduire quelques équations de résistance et quelques tableaux pour le calcul des propriétés géométriques de torsion.

On a vu que la torsion est souvent présente dans le calcul de la résistance au flambement des pièces et qu’elle est souvent associée à la flexion (voir les sous-sections 5.6.5 à 5.6.7, par exemple). On verra, dans le prochain chapitre, que la flexion et la torsion sont, une fois de plus, intimement liées dans ce qu’il est convenu d’appeler le déversement des poutres. Le déversement est cette propriété que possède une poutre de se déplacer transversalement à l’ultime et de subir une rotation autour de son axe longitudinal sous les charges qui la sollicitent. Le déversement et le flambement sont des phénomènes qui s’apparentent et qui font intervenir des propriétés géométriques de la section, telles que xo, J, Ip et Cw, comme on l’a vu.

Jusqu’à présent, tous ces concepts sont encore assez abstraits et il convient de les définir.

**5.11.2 Couples de résistance à la torsion pure et au gauchissement**

Dans les volumes sur la résistance des matériaux, on démontre que le couple de résistance interne en torsion d’une section, comme celle qui est montrée sur la figure 5.42 (voir acétate 163), comprend deux composantes : le couple de résistance dû à la torsion pure (C1) et le couple de résistance dû au gauchissement de la section (C2).

**Figure 5.42 – Étude de la résistance à la torsion**

## Diapositive 165 :

**5.11.2 Couples de résistance à la torsion pure et au gauchissement**

Dans les volumes sur la résistance des matériaux, on démontre que le couple de résistance interne en torsion d’une section, comme celle qui est montrée sur la figure 5.42, comprend deux composantes : le couple de résistance dû à la torsion pure (C1) et le couple de résistance dû au gauchissement de la section (C2).

**Figure 5.42 – Étude de la résistance à la torsion**

Le problème de la torsion pure est classique. Le couple de résistance interne est donné par l’équation (5.94) où J est la constante de torsion de Saint-Venant (en mm4), et G le module de Coulomb (26 000 MPa). L’angle β représente la rotation de la section par rapport au plan y-z.

(5.94)

Pour les profils ouverts, la constante de torsion de Saint-Venant est déterminée en décomposant la section en rectangles de largeur b et d’épaisseur t. La valeur de J est la somme des quantités relatives à tous ces rectangles (figure 5.43a – voir acétate).

(5.95)

Cette équation ne tient pas compte des congés de raccordement entre l’âme et les ailes des profilés. Ces congés peuvent faire augmenter la valeur de J de façon significative pour les profilés de type courant et les augmentations peuvent être encore plus importantes lorsque la section comporte des bourrelets, telle la cornière montrée sur la figure 5.31d.

Nous verrons, à la sous-section 5.11.4, comment tenir compte de l’influence des congés et des bourrelets dans le calcul des constantes de torsion de Saint-Venant.

**Figure 5.43 – Constante de torsion de Saint-Venant (J)**

Pour les profilés fermés à parois minces (figure 5.43b), la constante de torsion de Saint-Venant est proportionnelle au carré de l’aire délimitée par le contour moyen de la section et inversement proportionnelle à la somme des rapports d’élancement des parois constituant la section. La constante de torsion de Saint-Venant des sections fermées est très grande en comparaison de celle des sections ouvertes.

## Diapositive 166 :

En ce qui concerne le gauchissement de la section, on peut l’expliquer de la façon suivante. Lorsque s’amorce le déversement, la flexion latérale des ailes induit un couple de résistance en torsion. En effet, chaque aile se comporte comme une paroi mince de section rectangulaire fléchie par rapport à son axe fort. Cette flexion cause des contraintes de cisaillement dans chaque aile et l’intégrale de ces contraintes donne l’effort tranchant (Va) agissant dans chaque aile (figure 5.42 – voir acétate). En utilisant les équations de la résistance des matériaux qui relient l’effort tranchant au moment fléchissant et à la déformée, on obtient:

(5.96)

(5.97)

Dans ces équations, Ma est le moment fléchissant dans chaque aile et Ia est le moment d’inertie d’une aile. Pour les sections en I bisymétriques, ce moment d’inertie est approximativement égal à la moitié du moment d’inertie de toute la section par rapport à l’axe y-y (). En se référant à la figure 5.42, on peut écrire :

(5.98)

En introduisant cette dernière relation dans l’équation (5.97), on obtient :

(5.99)

Généralement, le couple de résistance interne en torsion, dû au gauchissement, s’écrit de la façon suivante, où Cw est la constante de gauchissement :

(5.100)

Ainsi, la constante de gauchissement en mm6, pour une section en I bisymétrique est :

(5.101)

Avec les équations (5.94) et (5.100), le couple de résistance interne en torsion (C) est égal à :

(5.102)

Le signe moins dans l’équation (5.102), provient de la relation entre le moment fléchissant (Ma) et la dérivée seconde ou courbure (). Si le moment est positif, la courbure est négative. Lorsqu’on trouve la solution de l’équation différentielle (5.102), la contribution de la torsion pure (C1) et celle du gauchissement (C2) s’additionnent.

Quelques valeurs de la constante de gauchissement sont données sur la figure 5.44 (voir acétates 166 et 167).

**Figure 5.44 – Constantes de gauchissement (Cw)**

## Diapositive 167 et 168 :

Pour une cornière ou un profilé en T, la valeur de Cw, obtenue des équations présentées sur la figure 5.44, est très faible (environ 1 %), en comparaison de celle d’une section en I ayant la même hauteur et la même surface. Pour toutes les sections constituées de parois intersectées en un seul point (cornière, section en T, section cruciforme), on admet généralement que Cw = 0. Autrement dit, ces sections ne gauchissent pas lorsqu’elles sont soumises à un couple de torsion.

Pour les sections fermées, la contribution du gauchissement au couple de résistance interne en torsion est petite lorsqu’on la compare à la contribution de la torsion pure (). En effet, le gauchissement produit un effort tranchant dans chaque aile et chaque âme et le couple de résistance interne produit par les âmes a tendance à annuler celui produit par les ailes. On peut démontrer que, pour une section en caisson où bw est égal à dt, le couple de résistance interne dû au gauchissement est nul.

**Note : Voir la remarque dans le texte concernant les cornières et les profilés en T**

**Figure 5.44 – Constantes de gauchissement (Cw)**

Il faut noter que, jusqu’ici, les explications données sur le gauchissement ont été liées au déversement. Dans les volumes traitant de la résistance des matériaux, ce problème est étudié en considérant une pièce soumise à un couple de torsion externe. Dans une poutre, si le plan de chargement (plan y – z) passe par le centre de torsion de la section, il n’y a pas de torsion externe. Toutefois, lorsque s’amorce le déversement, la résistance interne en torsion est mobilisée. Le cas du couple de torsion externe est étudié ci-après.

En général, dans les charpentes d’aluminium, on évite les problèmes de torsion en s’assurant que le plan de chargement d’une poutre passe par le centre de torsion de la section, de sorte que le couple de torsion externe est nul. Il y a toutefois des situations où il n’est pas possible d’éliminer la torsion.

Tel qu’on l’a expliqué plus haut, une partie de la résistance interne en torsion provient du gauchissement de la section causé par la flexion latérale des ailes. Cette flexion cause des contraintes de cisaillement et des contraintes normales de gauchissement (figure 5.45 – voir acétate 168). Lorsqu’un couple de torsion externe agit en même temps que le moment fléchissant, il faut tenir compte, dans le calcul des contraintes de cisaillement et des contraintes normales, des contraintes produites par la torsion et de celles produites par la flexion.

## Diapositive 169 :

Tel qu’on l’a expliqué plus haut, une partie de la résistance interne en torsion provient du gauchissement de la section causé par la flexion latérale des ailes. Cette flexion cause des contraintes de cisaillement et des contraintes normales de gauchissement (figure 5.45). Lorsqu’un couple de torsion externe agit en même temps que le moment fléchissant, il faut tenir compte, dans le calcul des contraintes de cisaillement et des contraintes normales, des contraintes produites par la torsion et de celles produites par la flexion.

Pour déterminer les contraintes normales et les contraintes de cisaillement produites par le couple de torsion externe, il suffit de trouver la solution générale de l’équation différentielle (5.102) puisque le couple externe est équilibré par le couple de résistance interne. Les constantes de la solution générale sont déterminées à partir des conditions de retenue de la pièce aux appuis. La solution exacte du problème est classique et on trouvera tous les détails dans la référence (5.28).

**Figure 5.45 – Torsion des profils ouverts – Contraintes normales dues au gauchissement**

Une solution approximative consiste à calculer les contraintes produites par la flexion latérale des ailes en considérant chaque aile comme une poutre de section rectangulaire (b X t) fléchie par rapport à son axe fort (). Si la torsion est produite par une charge verticale excentrée par rapport au centre de torsion, les deux ailes sont soumises à une force latérale équivalente (H) qui produit la flexion latérale de l’aile (figure 5.46a). Dans certains cas, la torsion est produite par une charge horizontale (H) transmise à l’aile supérieure de la poutre. La section travaille alors en flexion biaxiale ou flexion double et chaque aile est soumise à une force latérale équivalente à (figure 5.46b).

Avec la force latérale équivalente, il est possible de calculer l’effort tranchant et le moment fléchissant agissant dans l’aile, de calculer les contraintes produites par ces efforts et de les combiner à celles produites par la flexion. Toutefois, en procédant ainsi, on admet que le couple de résistance interne en torsion ne comprend qu’une seule composante, soit celle due au gauchissement de la section, dénotée C2. En conséquence, plus la composante de torsion pure est grande, plus l’erreur est grande et il faut réduire la valeur du moment fléchissant transversal.

**Figure 5.46 – Calcul des forces latérales équivalentes (voir acétate 169)**

Les auteurs de la référence (5.29[[63]](#footnote-63)) ont défini un coefficient correctif, dénoté ς, permettant d’utiliser la méthode approximative du paragraphe précédent. Il suffit de multiplier le moment fléchissant transversal sollicitant l’aile par le coefficient de correction (ςMt). Ce coefficient dépend principalement des conditions de retenue aux appuis, du type de chargement produisant la torsion, de la longueur et de la section de la poutre. Quelques valeurs du coefficient sont données dans le tableau 5.3 (voir acétate 170), pour un couple de torsion uniformément distribué et pour un couple de torsion concentré, agissant sur une poutre simplement appuyée en torsion.

## Diapositive 170 :

Une solution approximative consiste à calculer les contraintes produites par la flexion latérale des ailes en considérant chaque aile comme une poutre de section rectangulaire (b X t) fléchie par rapport à son axe fort (). Si la torsion est produite par une charge verticale excentrée par rapport au centre de torsion, les deux ailes sont soumises à une force latérale équivalente (H) qui produit la flexion latérale de l’aile (figure 5.46a). Dans certains cas, la torsion est produite par une charge horizontale (H) transmise à l’aile supérieure de la poutre. La section travaille alors en flexion biaxiale ou flexion double et chaque aile est soumise à une force latérale équivalente à (figure 5.46b).

Avec la force latérale équivalente, il est possible de calculer l’effort tranchant et le moment fléchissant agissant dans l’aile, de calculer les contraintes produites par ces efforts et de les combiner à celles produites par la flexion.Toutefois, en procédant ainsi, on admet que le couple de résistance interne en torsion ne comprend qu’une seule composante, soit celle due au gauchissement de la section, dénotée C2. En conséquence, plus la composante de torsion pure est grande, plus l’erreur est grande et il faut réduire la valeur du moment fléchissant transversal.

**Figure 5.46 – Calcul des forces latérales équivalentes**

## Diapositive 171 :

Les auteurs de la référence (5.29) ont défini un coefficient correctif, dénoté L, permettant d’utiliser la méthode approximative du paragraphe précédent. Il suffit de multiplier le moment fléchissant transversal sollicitant l’aile par le coefficient de correction (ςMt). Ce coefficient dépend principalement des conditions de retenue aux appuis, du type de chargement produisant la torsion, de la longueur et de la section de la poutre. Quelques valeurs du coefficient sont données dans le tableau 5.3 (voir acétate), pour un couple de torsion uniformément distribué et pour un couple de torsion concentré, agissant sur une poutre simplement appuyée en torsion.

**Tableau 5.3 – Valeurs de coefficient de correction (L) applicable au moment fléchissant transversal**

Dans le tableau 5.3, on note que plus la rigidité en torsion pure (GJ) est grande en comparaison du gauchissement (ECw), plus le coefficient correctif est petit, parce que la composante de torsion pure est plus importante. Le coefficient correctif ne s’applique qu’au moment fléchissant transversal dans l’aile. L’effort tranchant transversal n’est pas corrigé car il produit des contraintes de cisaillement dans l’aile qui sont relativement faibles. La méthode du coefficient correctif a été reprise dans la référence (5.30[[64]](#footnote-64)), qui contient de nombreux tableaux donnant les valeurs du coefficient de correction pour diverses conditions de retenue aux appuis et divers chargements.

## Diapositive 172 :

**5.11.3 Centre de torsion et moment d’inertie polaire**

Une section de profilé monosymétrique ou symétrique, sollicitée en torsion, va tourner autour d’un point qui ne coïncide pas avec le centre de gravité de la section. Cet axe de rotation passe par ce qu’il est convenu d’appeler le centre de torsion ou centre de cisaillement (voir les figures 5.30b, c et 5.44). Si la pièce devait être sollicitée de telle façon que seulement la flexion devait se produire, la ligne d’action de la charge passerait nécessairement par le centre de torsion. Lorsque la ligne d’action de la charge passe par un autre point, un torque égale au produit de la charge par la distance séparant ce point du centre de torsion est créé.

Dans le cas des sections composées, le centre de torsion se situe sur l’axe de symétrie, en un point divisant la distance (e) entre les centres de torsion des éléments constitutifs dans un rapport inverse à leurs moments d’inertie par rapport à l’axe sur lequel se trouve le centre de torsion (voir la figure 5.48 (voir acétate 175) pour la définition de e).

(5.103)

La distance totale entre les centres de torsion des éléments constitutifs est égale à :

Le moment d’inertie polaire (Ip) a été brièvement introduit dans la sous-section 5.6.5, traitant du flambement en torsion. Rappelons que pour les profilés asymétriques, le moment d’inertie polaire est obtenu de l’équation suivante, dans laquelle xo et yo sont les coordonnées du centre de torsion par rapport au centre de gravité, en mm :

(5.104)

Il en découle que Ip sera égal à pour les profilés monosymétriques et égal à pour les profilés bisymétriques, puisque dans ce dernier cas, le centre de gravité. Le calcul de Ip ne présente donc pas de difficulté majeur. Par extension, on définit le rayon de giration polaire comme étant ro, donné par l’équation suivante (voir l’équation 5.50[[65]](#footnote-65)):

(5.105)

## Diapositive 173, 174, 175 et 176 :

**5.11.4 Résumé des propriétés géométriques de torsion**

Les figures 5.47 (voir acétate) et 5.48 (voir acétate 175), tirées de la référence (5.9), présentent de façon regroupée les propriétés géométriques de torsion de plusieurs types de section. Ces données sont présentées dans le but d’assister le concepteur dans ses calculs,

Comme il a été motionné dans les sous-sections 5.6.5 et 5.11.2, les congés et bourrelets augmentent de façon appréciable le moment d’inertie de torsion. Pour tenir compte de ces éléments, il faut décomposer le profilé en ses différents constituants, plats, congés et bourrelets. Pour les plats, on utilise l’équation (5.95). Pour les congés ou les bourrelets, la majoration de la constante de torsion est donnée par l’équation suivante, où t est l’épaisseur des parois contiguës, et n est un facteur obtenu de la figure 5.49 (voir acétate 174).

(5.106)

Note : A = surface délimitée par la ligne médiane des parois d’une section fermée.

U = périmètre de la ligne médiane des parois d’une section fermée.

**Figure 5.47 – Constante de torsion de Saint-Venant (J)**

**Figure 5.48 – Position du centre de torsion (C) et constante de gauchissement (Cw)**

**Figure 5.49 – Aide au calcul de la contribution des congés et bourrelets à la constante de torsion de Saint-Venant**

Si les éléments réunis par un congé ne sont pas de même épaisseur, la valeur de J, pour cette partie, devient :

* pour un raccord entre deux éléments, où t2 est la paroi la plus mince,

(5.107)

* pour un raccord entre trois éléments, où t1 est l’épaisseur de l’aile,

(5.108)

La constante de torsion totale est alors la somme de celles des parties constituantes. Ces équations ont été utilisées pour le calcul de J de certaines sections de la figure 5.47. Un exemple de calcul est présenté à la sous-section 5.12.1 (exemple 5.1[[66]](#footnote-66)).

## Diapositive 177 :

**5.11.5 Résistance des pièces à la torsion**

Pour les calculs de résistance, on peut classer les sections en trois catégories : les sections creuses, les sections pleines et les sections ouvertes. Une équation générale, permettant de calculer la résistance pondérée en torsion pure (Hr; torsion de Saint-Venant) pour chacune de ces catégories de sections sera présentée. De ces équations, on prend pour acquis que les sections peuvent développer la pleine capacité plastique en torsion du matériau (Fsy), donnée par l’équation (2.3). En effet, puisqu'il s’agit de contraintes de cisaillement, Fsy = 0,6 Fy.

1. Pour les sections creuses, avec Φy = 0,9, t égal à l’épaisseur minimale de la paroi et A’ défini comme étant l’aire délimitée par le contour moyen de la section, on a :

(5.109)

Un cas particulier est celui des tubes ronds. Avec r égal au rayon moyen, l’équation (5.109) donne :

(5.110)

## Diapositive 178 :

1. Pour les sections pleines, avec a représentant la plus petite des dimensions de la section et A, l’aire de la section, on a :

(5.111)

On obtient l’équation suivante pour les tiges rondes, avec a = 2r :

(5.112)

c) Pour les sections ouvertes qui ne résistent pas au gauchissement, on obtient l’équation suivante dans laquelle w et t sont la largeur et l’épaisseur d’une paroi, et est l’épaisseur maximale :

(5.113)

Lorsqu’une section ouverte est libre de gauchir (voir figure 5.18b), la seule composante de la torsion qui offre une résistance est la torsion de Saint-Venant, ou torsion pure, évaluée à l’aide de l’équation (5.113).

Dans la plupart des cas, le gauchissement de la section est partiellement ou, à la limite, totalement retenu, ce qui a pour effet d’introduire des contraintes longitudinales dans la section, tel qu’illustré sur la figure 5.45, Les références (5.1) et (5.8) recommandent alors d’additionner ces contraintes aux contraintes de flexion et de s’assurer que le total n’excède pas .

1. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p288 [↑](#footnote-ref-1)
2. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p235 [↑](#footnote-ref-2)
3. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, pp331-348 [↑](#footnote-ref-3)
4. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p73 [↑](#footnote-ref-4)
5. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-5)
6. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p294 [↑](#footnote-ref-6)
7. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p194 [↑](#footnote-ref-7)
8. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p324 [↑](#footnote-ref-8)
9. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p307 [↑](#footnote-ref-9)
10. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p289 [↑](#footnote-ref-10)
11. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p287 [↑](#footnote-ref-11)
12. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p331 [↑](#footnote-ref-12)
13. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-13)
14. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p50 [↑](#footnote-ref-14)
15. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p293 [↑](#footnote-ref-15)
16. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p313 [↑](#footnote-ref-16)
17. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p316 [↑](#footnote-ref-17)
18. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p317 [↑](#footnote-ref-18)
19. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p254 [↑](#footnote-ref-19)
20. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p289 [↑](#footnote-ref-20)
21. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-21)
22. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-22)
23. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p195 [↑](#footnote-ref-23)
24. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p283 [↑](#footnote-ref-24)
25. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p194 [↑](#footnote-ref-25)
26. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p197 [↑](#footnote-ref-26)
27. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p282 [↑](#footnote-ref-27)
28. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p281 [↑](#footnote-ref-28)
29. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p285 [↑](#footnote-ref-29)
30. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p282 [↑](#footnote-ref-30)
31. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p306 [↑](#footnote-ref-31)
32. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p292 [↑](#footnote-ref-32)
33. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-33)
34. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p306 [↑](#footnote-ref-34)
35. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p307 [↑](#footnote-ref-35)
36. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p314 [↑](#footnote-ref-36)
37. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p308 [↑](#footnote-ref-37)
38. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p308 [↑](#footnote-ref-38)
39. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p310 [↑](#footnote-ref-39)
40. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p311 [↑](#footnote-ref-40)
41. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p317 [↑](#footnote-ref-41)
42. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p317 [↑](#footnote-ref-42)
43. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p308 [↑](#footnote-ref-43)
44. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p311 [↑](#footnote-ref-44)
45. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p310 [↑](#footnote-ref-45)
46. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p310 [↑](#footnote-ref-46)
47. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p261 [↑](#footnote-ref-47)
48. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p261 [↑](#footnote-ref-48)
49. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p305 [↑](#footnote-ref-49)
50. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p373 [↑](#footnote-ref-50)
51. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p196 [↑](#footnote-ref-51)
52. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p324 [↑](#footnote-ref-52)
53. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p307 [↑](#footnote-ref-53)
54. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p369 [↑](#footnote-ref-54)
55. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p371 [↑](#footnote-ref-55)
56. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p305 [↑](#footnote-ref-56)
57. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, pp376 [↑](#footnote-ref-57)
58. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p319 [↑](#footnote-ref-58)
59. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p379 [↑](#footnote-ref-59)
60. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p173 [↑](#footnote-ref-60)
61. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p314 [↑](#footnote-ref-61)
62. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p342 [↑](#footnote-ref-62)
63. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-63)
64. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p384 [↑](#footnote-ref-64)
65. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p328 [↑](#footnote-ref-65)
66. Les Presses de l’Aluminium PRAL, *Calcul des charpentes d’aluminium*, Denis Beaulieu, p361 [↑](#footnote-ref-66)